Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Clemens Ballarin

Vorlesung Semantik
Sommersemester 2004
Übungsblatt 1
Besprechung am 28. April 2004

Prolog

In der ersten Übung am 21. April 2004 eine Einführung in die Programmiersprache PROLOG gegeben.

Aufgabe 1 (Ü) (*Relationen: Produkt, Bild, inverses Bild*)

Eine *zweistellige Relation* R auf Mengen X und Y ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von X und Y:

$$R \subseteq X \times Y$$

Für $(x, y) \in R$ schreibt man oft $x\, R\, y$.

Sei $S = \{s_0, \ldots, s_4\}$ eine Menge von Städten. Die Relation $V \subseteq S \times S$ mit

$$V = \{(s_0, s_1), (s_1, s_0), (s_1, s_2), (s_2, s_1), (s_2, s_3), (s_2, s_4), (s_3, s_2), (s_3, s_4), (s_4, s_2), (s_4, s_3)\}$$

gibt an, welche Städte durch eine Straße verbunden sind.

1. Seien Q und R zweistellige Relationen auf X und Y bzw. auf Y und Z. Dann ist das *Produkt* $R \circ Q$ von Q und R definiert als folgende Relation auf X und Z:

   $$R \circ Q = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y.\, x\, Q\, y \wedge y\, R\, z\}$$

   Berechnen Sie die Relation $V \circ V$.

2. Sei R eine zweistellige Relation auf X und Y, $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$. Dann ist das *(direkte) Bild* $R\, M$ von M unter R definiert als folgende Teilmenge von Y:

   $$R\, M = \{y \in Y \mid \exists m \in M.\, m\, R\, y\}$$

   Das *inverse Bild* $R^{-1}\, N$ von N unter R ist definiert als folgende Teilmenge von X:

   $$R^{-1}\, N = \{x \in X \mid \exists n \in N.\, x\, R\, n\}$$

   Seien $M = \{s_1, s_3\} \subseteq S$ und $N = \{s_0, s_1, s_4\} \subseteq S$. Bestimmen Sie die Mengen $V\, M$ und $V^{-1}\, N$.

Aufgabe 2 (Ü) (*Große Vereinigung, Hüllenbildung*)

Die *große Vereinigung* $\bigcup K$ einer Menge K von Mengen ist definiert als:

$$\bigcup K = \{a \mid \exists M \in K.\, a \in M\}$$

Wenn $K = \{K_i \mid i \in I\}$ eine bzgl. der Indexmenge I indizierte Menge ist, schreibt man statt $\bigcup K$ auch $\bigcup_{i \in I} K_i$.

Sei $R \subseteq X \times X$ eine Relation auf der Menge X und sei $Id_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ die *Identitäts-Relation* auf X.

1. Die *n-fache Iteration* der Relation R ist induktiv definiert als:

   $$R^0 = Id_X \qquad\qquad R^{n+1} = R \circ R^n$$

   Geben Sie für die Verbindungsrelation V aus Aufgabe 1 die Relationen V^0, V^1, V^2 und V^3 an.

2. Die *transitive Hülle* R^+ der Relation R ist definiert als:

   $$R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^{n+1}$$

   Die *transitive und reflexive Hülle* $R^\star$ der Relation R ist definiert als:

   $$R^\star = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$$

   Geben Sie für die Verbindungsrelation V aus Aufgabe 1 die Relation $V^\star$ an.