Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Gerwin Klein

WS 2001/2002
Übungsblatt 8
03. 12. 2001

Übungen zur Semantik von Programmiersprachen

Aufgabe 1 **(H)** *(Eigenschaften des Operators $\hat{R}$)*
Abgabetermin: Montag, 10.12.01

Für eine Menge $R \subseteq \wp(M) \times M$ von Regelinstanzen über der Grundmenge M ist der Operator $\hat{R} : \wp(M) \to \wp(M)$ definiert wie folgt:

$$\hat{R}(B) = \{y \mid \exists X \subseteq B.\ (X, y) \in R\}$$

(a) Beweisen Sie den Satz:

Die Menge B ist abgeschlossen unter $R \iff \hat{R}(B) \subseteq B$

(b) Beweisen Sie die Monotonie von $\hat{R}$ bzgl. der Mengeninklusion, d.h.:

$$A \subseteq B \Longrightarrow \hat{R}(A) \subseteq \hat{R}(B)$$

(c) Beweisen Sie die Stetigkeit von $\hat{R}$ für ω-Ketten bzgl. der Mengeninklusion, d.h.:

$$\bigcup_{n \in \omega} \hat{R}(B_n) = \hat{R}(\bigcup_{n \in \omega} B_n)$$

für alle ω-Ketten $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots$

Aufgabe 2 **(H)** *(Monotonie vs. Vergrößerung)*
Abgabetermin: Montag, 10.12.01

Sei S eine beliebige Menge. Eine Funktion $f : \wp(S) \to \wp(S)$ ist *monoton*, falls für alle $N \subseteq S, M \subseteq S$ mit $N \subseteq M$ gilt: $f(N) \subseteq f(M)$. Wir nennen f *vergrößernd*, falls für alle $M \subseteq S$ gilt: $M \subseteq f(M)$.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn f monoton, dann f vergrößernd

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn f vergrößernd, dann f monoton

(c) Sei zu einer Menge von Regeln R der Operator $\bar{R}$ definiert als

$$\bar{R}(A) = A \cup \{y \mid \exists X \subseteq A.\ (X, y) \in R\}$$

Geben Sie bzgl. $\bar{R}$ den kleinsten Fixpunkt, der A enthält, in geschlossener Form an. Zeigen Sie, dass es sich dabei tatsächlich um den kleinsten Fixpunkt handelt, der A enthält.

Aufgabe 3 **(Ü)** (*Denotationelle Semantik einer while-Schleife*)

Gegeben ist folgendes WHILE-Programm P mit natürlichzahligen Variablen X, i und N:

$$X := 0 \; ; \; i := N \; ; \; \textbf{while } i > 0 \textbf{ do } (X := X + 2 \cdot i \; ; \; i := i - 1)$$

(a) Geben Sie die Funktion Γ an, die in der denotationellen Semantik zur Schleife w gehört:

$$\Gamma : (\Sigma \nrightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \nrightarrow \Sigma)$$

(b) Die n–fache Iteration ($n \in \mathbb{N}$) der Funktion Γ ist wie folgt induktiv definiert (für alle $\varphi \in (\Sigma \nrightarrow \Sigma)$):

$$\Gamma^0(\varphi) = \varphi$$
$$\Gamma^{n+1}(\varphi) = \Gamma(\Gamma^n(\varphi))$$

Berechnen Sie $\Gamma^0(\emptyset)$ und $\Gamma^1(\emptyset)$.

(c) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\forall \sigma : (\mathcal{C}[\![\textbf{while } i > 0 \textbf{ do } (X := X + 2 \cdot i \; ; \; i := i - 1)]\!]\sigma)(X) = \sigma(i) \cdot (\sigma(i) + 1) + \sigma(X)$$

Hinweis: Induktion über $\sigma(i)$

(d) Geben Sie $\Gamma^n(\emptyset)$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^n(\emptyset)$ an (ohne Beweis). Beachten Sie dabei, daß gilt:

$$\mathcal{C}[\![w]\!] \; = fix(\Gamma) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^n(\emptyset)$$

(e) Zeigen Sie unter Verwendung von (c), daß für das gesamte Programm P gilt:

$$\forall \sigma : (\mathcal{C}[\![P]\!]\sigma)(X) = \sigma(N) \cdot (\sigma(N) + 1)$$