

Übungen zur Semantik von Programmiersprachen

Aufgabe 1 (H) (*Fixpunktgleichungen*) Abgabetermin: Montag, 17.12.2001

Eine partielle Funktion $f : A \multimap B$ auf den Mengen A, B ist eine Relation $f \subseteq A \times B$ mit

$$(a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2.$$

Die 'kleiner'-Ordnung auf Funktionen entspricht dann der Teilmengenrelation auf $A \times B$, d.h. für $f : A \multimap B$ und $g : A \multimap B$ gilt:

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow f \subseteq g$$

Sei $f : \mathbb{N} \multimap \mathbb{N}$ eine Funktion, die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$f(k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \\ f(k+2) & \text{falls } k = 1 \\ f(k-2) & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, daß jede der folgenden Funktionen diese Eigenschaft erfüllt:

- $f_1 : k \mapsto 1$
- $f_2 : k \mapsto (k \bmod 2) + 1$
- $f_3 : k \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$

(b) Welches ist die kleinste Funktion, die diese Eigenschaft erfüllt?

Aufgabe 2 (H) (*Fixpunkte von monotonen Funktionen*)

Abgabetermin: Montag, 17.12.2001

Sei P eine cpo mit $\perp$. Sei $f : P \rightarrow P$ eine monotone Funktion. Der Fixpunktsatz $\text{fix}(f) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$ läßt sich dann für f nicht anwenden, denn dazu wird die Stetigkeit der Funktion f gefordert.

(a) Zeigen Sie, dass für monotonen f folgende Einschränkung gilt:

Wenn $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$ ein Fixpunkt von f ist, dann ist es auch der kleinste Fixpunkt.

(b) Folgern Sie daraus, dass gilt:

Wenn für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt, daß $f^{n+1}(\perp) = f^n(\perp)$,

dann ist $f^n(\perp)$ der kleinste Fixpunkt von f .

Aufgabe 3 (Ü) (*cpos*)

Gegeben seien die üblichen Ordnungen auf Zahlen $\leq$ und $\geq$. Welche der folgenden Halbordnungen ist eine cpo ? (Begründung)

- (a) $(\{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}, \leq)$
- (b) $(\{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}, \leq)$
- (c) $(\{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}, \geq)$
- (d) $(\{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}, \geq)$

Aufgabe 4 (Ü) (*Stetigkeit*)

Seien D , E und F vollständige, partiell geordnete Mengen (cpos). Seien $f : D \rightarrow E$ und $g : E \rightarrow F$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, daß gilt:

$$g \circ f \text{ ist stetig}$$

Aufgabe 5 (P) (*Denotationelle Semantik von WHILE in Gofer*)

Abgabetermin: Montag, 17.12.2001, an kleing@in.tum.de

Die denotationelle Semantik von WHILE soll in der funktionalen Programmiersprache Gofer implementiert werden.

In der Datei

`/usr/proj/semantik/prog/gofer/denotational/semantik.gs`

wird Ihnen ein Rahmen für das Gofer-Programm zur Verfügung gestellt. Vervollständigen Sie diesen und testen Sie Ihre Implementierung anhand der Datei

`/usr/proj/semantik/prog/gofer/denotational/dialog.txt`