

## Hinweis

Wegen des *dies academicus* verschiebt sich die Zentralübung vom 5. Dezember auf den 12. Dezember. Am 5. Dezember findet keine Zentralübung statt.

## Aufgabe 1 (H) (*Monotonie vs. Vergrößerung*)

Sei  $S$  eine beliebige Menge. Eine Funktion  $f : \wp(S) \rightarrow \wp(S)$  ist *monoton*, falls für alle  $N \subseteq S, M \subseteq S$  mit  $N \subseteq M$  gilt:  $f(N) \subseteq f(M)$ . Wir nennen  $f$  *vergrößernd*, falls für alle  $M \subseteq S$  gilt:  $M \subseteq f(M)$ .

- Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn  $f$  monoton, dann  $f$  vergrößernd.
- Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn  $f$  vergrößernd, dann  $f$  monoton.
- Sei zu einer Menge von Regeln  $R$  der Operator  $\bar{R}$  definiert als

$$\bar{R}(A) = A \cup \{y \mid \exists X \subseteq A. (X, y) \in R\}$$

Geben Sie bzgl.  $\bar{R}$  den kleinsten Fixpunkt, der  $A$  enthält, in geschlossener Form an. Zeigen Sie, dass es sich dabei tatsächlich um den kleinsten Fixpunkt handelt, der  $A$  enthält.

## Aufgabe 2 (H) (*Denotationelle Semantik einer while-Schleife*)

Gegeben ist folgendes WHILE-Programm  $P$  mit natürlichzahligen Variablen  $x, i$  und  $n$ . Die while-Schleife sei mit  $w$  bezeichnet.

$$x := 0 ; i := n ; \mathbf{while} \ i > 0 \ \mathbf{do} \ (x := x + 2 \cdot i ; i := i - 1)$$

- Geben Sie die denotationelle Semantik des Schleifenrumpfs, also die Funktion

$$\mathcal{S}[x := x + 2 \cdot i ; i := i - 1]$$

an.

- Geben Sie die Funktion  $\Gamma$  an, die in der denotationellen Semantik zur Schleife  $w$  gehört:

$$\Gamma : (\Sigma \leftrightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \leftrightarrow \Sigma)$$

- Die  $n$ -fache Iteration ( $n \in \mathbb{N}$ ) der Funktion  $\Gamma$  ist wie folgt induktiv definiert (für alle  $\varphi \in (\Sigma \leftrightarrow \Sigma)$ ):

$$\begin{aligned} \Gamma^0(\varphi) &= \varphi \\ \Gamma^{n+1}(\varphi) &= \Gamma(\Gamma^n(\varphi)) \end{aligned}$$

Berechnen Sie  $\Gamma^0(\emptyset)$ ,  $\Gamma^1(\emptyset)$  und  $\Gamma^2(\emptyset)$ .

### Aufgabe 3 (Ü) (*Denotationelle Semantik einer while-Schleife*)

Fortsetzung zu Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\forall \sigma : (\mathcal{S}[\text{while } i > 0 \text{ do } (x := x + 2 \cdot i ; i := i - 1)]\sigma)(x) = \sigma(i) \cdot (\sigma(i) + 1) + \sigma(x)$$

*Hinweis:* Induktion über  $\sigma(i)$

b) Geben Sie  $\Gamma^n(\emptyset)$  und  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^n(\emptyset)$  an (ohne Beweis). Beachten Sie dabei, daß gilt:

$$\mathcal{S}[w] = \text{fix}(\Gamma) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^n(\emptyset)$$

c) Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass für das gesamte Programm  $P$  gilt:

$$\forall \sigma : (\mathcal{S}[P]\sigma)(x) = \sigma(n) \cdot (\sigma(n) + 1)$$

### Aufgabe 4 (P) (*Denotationelle Semantik von WHILE in Gofer*)

Die denotationelle Semantik von WHILE soll in der funktionalen Programmiersprache Gofer implementiert werden. In der Datei

```
/usr/proj/semantik/prog/gofer/denotational/semantik.gs
```

wird Ihnen ein Rahmen für das Gofer-Programm zur Verfügung gestellt. Vervollständigen Sie diesen und testen Sie Ihre Implementierung anhand der Datei

```
/usr/proj/semantik/prog/gofer/denotational/dialog.txt
```