Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Clemens Ballarin

Vorlesung Semantik
Wintersemester 2002/03
Übungsblatt 11
Besprechung am 23. Januar 2003

Aufgabe 1 (H) (*Anwendung des Knaster-Tarski Fixpunkt-Theorems*)

Für eine Funktion $h : M \longrightarrow N$ ist die Erweiterung $\tilde{h} : \wp(M) \longrightarrow \wp(N)$ folgendermaßen definiert:

$$\tilde{h}(M_1) = \{n \mid \exists m \in M_1.\ h(m) = n\}$$

für $M_1 \subseteq M$.

a) Zeigen Sie die Gültigkeit des Banach'schen Dekompositionstheorems:

Gegeben seien zwei beliebige Mengen X und Y und zwei beliebige Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$.

Dann gibt es $X_1, X_2 \subseteq X$ mit $X_1 \cup X_2 = X$ und $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ und $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ mit $Y_1 \cup Y_2 = Y$ und $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, sodass

$$\tilde{f}(X_1) = Y_1 \tag{1}$$
$$\tilde{g}(Y_2) = X_2 \tag{2}$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

i) Stellen Sie den Inhalt des Theorems zeichnerisch dar.

ii) Geben Sie eine Funktion $\Phi : \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ unter Zuhilfenahme der Eigenschaften (1) und (2) an, so dass X_2 ein Fixpunkt von Φ ist.

iii) Weisen Sie die Existenz eines Fixpunkts von Φ nach.

b) Zeigen Sie nun das Theorem von Schröder-Bernstein:

Gegeben seien zwei beliebige Mengen X und Y. Wenn es zwei injektive Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$ gibt, dann gibt es eine Bijektion $b : X \longrightarrow Y$.

Hinweis: Konstruieren Sie die Funktion b unter Verwendung des Theorems aus (a).

Aufgabe 2 (H) (*Beweis im Hoare-Kalkül*)

Zeigen Sie, dass gilt

$\{a \geq 0\}$
  $n = 0;\ m = 0;\ k = 0;$
  while $k < a$ **do**
    $(n = n + 1;\ k = k + m + 1;\ m = m + 2)$
$\{n - 1 < \sqrt{a} \leq n\}$

Hinweis: Die Invariante der Schleife ist etwas trickreich. Berechnen Sie ein paar einfache Beispiele und versuchen Sie herauszufinden, in welcher Beziehung m, n und k zueinander stehen.

Aufgabe 3 (Ü) (*Invarianten*)

Berechnen Sie die Werte von *pre* und *vc* für die Nachbedingung $\{n-1 < \sqrt{a} \leq n\}$ und das Programm aus Aufgabe 2.

Benutzen Sie dazu

a) die richtige Invariante

b) eine zu schwache Invariante

c) eine falsche Invariante

Aufgabe 4 (Ü) (*Normalisierung von Hoare-Beweisen*)

Die Regeln des Hoare-Kalküls sind bis auf die Konsequenzregel syntaxgesteuert (es existiert jeweils genau eine Regel für jedes Statement). Obwohl die Konsequenzregel prinzipiell immer anwendbar ist, kann man sich in der Beweissuche jedoch auf bestimmte Situationen beschränken.

Wir betrachten dazu folgendes System K aus der Semikolon-Regel, der **if**-Regel und den abgeleiteten Regeln

$$\frac{P \Longrightarrow Q}{\{P\}\ \textbf{skip}\ \{Q\}} \qquad \frac{P \Longrightarrow Q[a/x]}{\{P\}\ x := a\ \{Q\}}$$

$$\frac{P \Longrightarrow I \quad \{I \wedge b\}\ s\ \{I\} \quad I \wedge \neg b \Longrightarrow Q}{\{P\}\ \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ s\ \{Q\}}$$

Zeigen Sie nun folgende Behauptung: Jeder Beweis im Hoare-Kalkül kann in einen Beweis im System K überführt werden. Formal: $\vdash \{P\}s\{Q\} \Longrightarrow \vdash_K \{P\}s\{Q\}$

Prüfung

Die Semestralprüfung findet am Mittwoch, den 5. Februar 2003, (vormittags) als mündliche Prüfung statt. Wenn Sie einen Schein erwerben möchten, melden Sie sich bitte spätestens bis zum 28. Januar per E-Mail an (`ballarin@in.tum.de`). Wenn Sie nicht sicher sind, ob Sie die geforderte Punktzahl auf den Übungsblättern erreicht haben, wenden Sie sich bitte an die Übungsleitung.