Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Olaf Müller

WS 1998/99
Übungsblatt 9
18. 1. 1999

Übungen zur Semantik von Programmiersprachen

Aufgabe 1 **(H)** *(Produkte über cpo's)* **Abgabetermin: Dienstag, 26.1.99, 12 Uhr**

(a) Die Projektionsfunktionen $\pi_i : D_1 \times \ldots D_k \to D_i$, $i = 1, \ldots, k$ selektieren jeweils die i-te Komponente eines Tupels, d.h.

$$\pi_i(d_1, \ldots, d_k) = d_i.$$

Zeigen Sie, daß die Projektionsfunktionen stetig sind.

(b) Sei **O** die Menge $\{\bot, \top\}$ mit der Ordnung

$$\bot \sqsubseteq \top$$

O ist eine cpo.

Stellen Sie die Ordnung der Elemente von **O**, $\mathbf{O}^2$ und $\mathbf{O}^3$ graphisch dar.

Aufgabe 2 **(H)** *(Stetige Funktionen)* **Abgabetermin: Dienstag, 26.1.99, 12 Uhr**

Sei Ω eine Erweiterung der natürlichen Zahlen um das Element ∞ mit der Ordnung

$$0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq n \sqsubseteq \ldots \infty.$$

Ω ist eine cpo.

Für $n \in \Omega$ sei die Funktion $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{O}$ folgendermaßen definiert:

$$f_n(x) = \begin{cases} \top & falls\ n \sqsubseteq x \\ \bot & sonst \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, daß f_n stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) Zeigen Sie, daß f_∞ nicht stetig ist

Aufgabe 3 **(Ü)** (*Vertauschung von lub's*)

Sei $g : \alpha \to \beta \to \gamma$ eine Funktion höherer Stufe ("Funktional") auf den po's α, β und der cpo γ. Sei weiterhin g monoton im 'ersten' und 'zweiten' Argument, d.h.:

$$\begin{array}{ll} B1: & x_1 \sqsubseteq x_2 \Rightarrow g(x_1) \sqsubseteq g(x_2) \\ B2: & \forall x.\ y_1 \sqsubseteq y_2 \Rightarrow g(x)(y_1) \sqsubseteq g(x)(y_2) \end{array}$$

Beweisen Sie für beliebige ω-Ketten $X = (X_j)_{j\in\omega}$ und $Y = (Y_i)_{i\in\omega}$ den folgenden Satz. (Vertauschungslemma)

$$\bigsqcup_{j\in\omega} \bigsqcup_{i\in\omega} g(X_j)(Y_i) = \bigsqcup_{i\in\omega} \bigsqcup_{j\in\omega} g(X_j)(Y_i)$$

Um Ihnen den Beweis zu erleichtern, seien folgende Hilfssätze für beliebige ω-Ketten C und D gegeben:

$$\begin{array}{ll} H1: & (\forall i.\ C_i \sqsubseteq x) \Rightarrow \bigsqcup_{i\in\omega} C_i \sqsubseteq x \\ H2: & \forall i.\ C_i \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in\omega} C_i \\ H3: & (\forall i.\ C_i \sqsubseteq D_i) \Rightarrow \bigsqcup_{i\in\omega} C_i \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in\omega} D_i \end{array}$$

Weiterhin seien folgende Ketteneigenschaften der Funktion g bereits gezeigt:

$$\begin{array}{ll} K1: & (g(X_j)(Y_i))_{i\in\omega} \text{ ist } \omega\text{-Kette für alle } j \\ K2: & (g(X_j)(Y_i))_{j\in\omega} \text{ ist } \omega\text{-Kette für alle } i \\ K3: & (\bigsqcup_{j\in\omega} g(X_j)(Y_i))_{i\in\omega} \text{ ist } \omega\text{-Kette} \\ K4: & (\bigsqcup_{i\in\omega} g(X_j)(Y_i))_{j\in\omega} \text{ ist } \omega\text{-Kette} \end{array}$$

Aufgabe 4 (Ü) (*Die kleinste obere Schranke stetiger Funktionen ist stetig*)

Sei $(f_i)_{i\in\omega}$ eine ω-Kette stetiger Funktionen. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $\lambda x.\ \bigsqcup_{i\in\omega} f_i(x)$ ist stetig.

(b) Die Funktion $\lambda x.\ \bigsqcup_{i\in\omega} f_i(x)$ ist die kleinste obere Schranke der Kette $(f_i)_{i\in\omega}$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß die Funktion $\lambda x.\ \bigsqcup_{i\in\omega} f_i(x)$ eine obere Schranke ist und dann, daß sie kleiner ist als jede andere obere Schranke.

Aufgabe 5 (Ü) (*Korrektheit eines Compilers*)

In der Vorlesung wurde ein einfacher Compiler der Sprache IMP in die Assemblersprache IAL angegeben. Zudem wurde der Beweis der Korrektheit dieses Compilers skizziert. Führen Sie diesen Beweis nun explizit.