Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Olaf Müller

WS 1998/99
Übungsblatt 11
1. 2. 1999

Übungen zur Semantik von Programmiersprachen

Aufgabe 1 **(H)** (*Anwendung des Knaster-Tarski Fixpunkt-Theorems*)
Abgabe: Dienstag, 8. 2. 99, 12 Uhr

Für eine Funktion $h : M \longrightarrow N$ ist die Erweiterung $\tilde{h} : \wp(M) \longrightarrow \wp(N)$ folgendermaßen definiert:

$$\tilde{h}(M_1) = \{n \mid \exists m \in M_1.\ h(m) = n\}$$

für $M_1 \subseteq M$.

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit des Banach'schen Dekompositionstheorems:

Gegeben seien zwei beliebige Mengen X und Y und zwei beliebige Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$.

Dann gibt es $X_1, X_2 \subseteq X$ mit $X_1 \cup X_2 = X$ und $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ und $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ mit $Y_1 \cup X_2 = Y$ und $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, sodaß

$$\tilde{f}(X_1) = Y_1 \qquad (1)$$

$$\tilde{g}(Y_2) = X_2 \qquad (2)$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

i) Stellen Sie den Inhalt des Theorems zeichnerisch dar.

ii) Geben Sie eine Funktion $\Phi : \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ unter Zuhilfenahme der Eigenschaften (1) und (2) an, so daß X_2 ein Fixpunkt von Φ ist.

iii) Weisen Sie die Existenz eines Fixpunkts von Φ nach.

(b) Zeigen Sie nun das Theorem von Schröder-Bernstein:

Gegeben seien zwei beliebige Mengen X und Y. Wenn es zwei injektive Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$ gibt, dann gibt es eine Bijektion $b : X \longrightarrow Y$.

Hinweis: Konstruieren Sie die Funktion b unter Verwendung des Theorems aus (a).

Aufgabe 2 **(Ü)** (*Unendliche Produkte und Stetigkeit*)

Sei D eine Cpo und I eine *unendliche* Menge. Dann bezeichnet D^I die Cpo der unendlichen Tupel $(d_i)_{i \in I}$ $(d_i \in D)$ mit komponentenweiser Ordnung.

Zeigen Sie, daß eine komponentenweise stetige Funktion $f : D^I \to D$ nicht stetig zu sein braucht.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $\mathbf{O}^\omega \to \mathbf{O}$ mit $\mathbf{O}$ aus Blatt 9/Aufgabe 1b.

Aufgabe 3 **(Ü)** (*Call-by-value-Semantik*)

Gegeben ist in der Sprache REC aus der Vorlesung folgende rekursive Funktionsdefinition:

$$ble(x, y) = \textbf{if } x \textbf{ then } 1 \textbf{ else } ble(x - 1, ble(x - y, y))$$

(a) Für welche Werte terminiert *ble* unter call-by-value-Auswertung? (Informelle Begründung)

(b) Geben Sie die zur Definition von *ble* gehörende Funktion

$$F : \textbf{Fenv} \to \textbf{Fenv}$$

an, so daß sich die denotationelle call-by-value-Semantik der Definition von *ble* als kleinster Fixpunkt von F ergibt.

(c) Geben Sie eine explizite Form von $F^n(\perp)$ $(n \geq 0)$ an, und beweisen Sie diese als korrekt (*Hinweis:* Induktion über n).

(d) Geben Sie unter Verwendung von (c) eine explizite Form von

$$\bigsqcup_{n \in \omega} F^n(\perp)$$

an.