Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Olaf Müller

WS 1998/99
Lösungsvorschläge zu Blatt 9
26. 1. 1999

Übungen zur Semantik von Programmiersprachen

Aufgabe 1 (Lösungsvorschlag)

(a)

- Monotonie: Für $(d_1, d_2, \ldots, d_k), (e_1, d_2, \ldots e_k) \in D_1 \times D_2 \times \ldots D_k$ gilt:

$$\begin{array}{ll} & (d_1, d_2, \ldots, d_k) \sqsubseteq (e_1, e_2, \ldots e_k) \\ \Leftrightarrow & \{ \quad \text{Def. } \sqsubseteq \} \\ & \forall i.\ d_i \sqsubseteq e_i \\ \Leftrightarrow & \{ \quad \text{Def. } \pi \} \\ & \forall i.\ \pi_i(d_1, d_2, \ldots, d_k) \sqsubseteq \pi_i(e_1, e_2, \ldots e_k) \end{array}$$

- Lub: Für alle ω-Ketten $(d_{1_1}, d_{2_1}, \ldots, d_{k_1}) \sqsubseteq (d_{1_2}, d_{2_2}, \ldots, d_{k_2}) \sqsubseteq (d_{1_3}, d_{2_3}, \ldots, d_{k_3}) \ldots$ und für beliebiges $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:

$$\begin{array}{ll} & \pi_i\ (\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (d_{1_n}, d_{2_n}, \ldots, d_{k_n})) \\ = & \{ \quad \text{Def. } \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \} \\ & \pi_i\ (\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} d_{1_n}, \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} d_{2_n}, \ldots, \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} d_{k_n}) \\ = & \{ \quad \text{Def. } \pi \} \\ & \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} d_{i_n} \\ = & \{ \quad \text{Def. } \pi \} \\ & \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (\pi_i\ (d_{1_n}, d_{2_n}, \ldots, d_{k_n})) \end{array}$$

(b) O:

$$\begin{array}{c} \top \\ | \\ \bot \end{array}$$

O^2:

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] & (\top, \top) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (\bot, \top) \arrow[dr] & & (\top, \bot) \arrow[dl] \\ & (\bot, \bot) & \end{tikzcd}$$

O^3:

$$\begin{tikzcd}
& (\top,\top,\top) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(\bot,\top,\top) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & (\top,\bot,\top) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & (\top,\top,\bot) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
(\bot,\bot,\top) \arrow[dr, dash] & (\bot,\top,\bot) \arrow[d, dash] & (\top,\bot,\bot) \arrow[dl, dash] \\
& (\bot,\bot,\bot) &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 2 (Lösungsvorschlag)

(a)

- Monotonie: Für $x_1, x_2 \in \Omega$ gelte $x_1 \sqsubseteq x_2$.
  Da die $\sqsubseteq$-Ordnung auf Ω eine lineare Ordnung ist, werden alle möglichen Anordnungen von x_1, x_2, n durch folgende Fallunterscheidung abgedeckt:

$$\begin{array}{rl}
x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq n: & \text{Es gilt: } f_n(x_1) = \bot \sqsubseteq \bot = f_n(x_2) \\
x_1 \sqsubset n \sqsubseteq x_2: & \text{Es gilt: } f_n(x_1) = \bot \sqsubseteq \top = f_n(x_2) \\
n \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2: & \text{Es gilt: } f_n(x_1) = \top \sqsubseteq \top = f_n(x_2)
\end{array}$$

- Lub: Für alle ω-Ketten $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \ldots$ gilt für beliebiges $i \in \mathbb{N}$:

$$f_i(\bigsqcup_{n\in\mathrm{N}} x_n) = \begin{cases} \top & falls\ i \sqsubseteq \bigsqcup_{n\in\mathrm{N}} x_n \\ \bot & sonst \end{cases}$$

$$\bigsqcup_{n\in\mathrm{N}} f_i(x_n) = \bigsqcup_{n\in\mathrm{N}} \begin{cases} \top & falls\ i \sqsubseteq x_n \\ \bot & sonst \end{cases} = \begin{cases} \top & falls\ \exists n.\ i \sqsubseteq x_n \\ \bot & sonst \end{cases}$$

Um zu prüfen, ob die beiden Zeilen immer dasselbe Ergebnis liefern, unterscheiden wir folgende Fälle:

- $(x_n)_{n\in\omega}$ enthält nur endlich viele verschiedene Elemente, dann gibt es ein $x_{max} \in (x_n)_{n\in\omega}$ mit $\bigsqcup_{n\in\mathrm{N}} x_n = x_{max}$. Also gilt

$$i \sqsubseteq \bigsqcup_{n\in\mathrm{N}} x_n = i \sqsubseteq x_{max} \Longleftrightarrow \exists n.\ i \sqsubseteq x_n$$

- $(x_n)_{n\in\omega}$ enthält unendlich viele verschiedene Elemente, dann gilt $\bigsqcup_{n\in\mathrm{N}} x_n = \infty$. Damit gilt

$$\underbrace{i \sqsubseteq \bigsqcup_{n\in\mathrm{N}} x_n}_{\text{true}} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\exists n.\ i \sqsubseteq x_n}_{\text{wähle } x_n = i+1}$$

(b) f_∞ ist nicht stetig, denn für die ω-Kette $x_n = n$ gilt

$$\bigsqcup_{n\in\mathrm{N}} x_n = \infty,$$

aber für alle Elemente x_i gilt

$$x_i \neq \infty$$

Damit gilt:

$$f_\infty(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} x_n) = f_\infty(\infty) = \top$$

Aber es gilt:

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f_\infty(x_n) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} \top & falls\ \infty \sqsubseteq x_n \\ \bot & sonst \end{cases} = \bot$$

Damit gilt:

$$f_\infty(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} x_n) \neq \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f_\infty(x_n),$$

also ist f_∞ nicht stetig.

Aufgabe 3 (Lösungsvorschlag)

Wir beweisen die Identität durch den Nachweis der gegenseitigen Approximation (Antisymmetrie von $\sqsubseteq$).

Richtung $\sqsubseteq$:

$$\begin{array}{ll} & \bigsqcup_{j\in\omega} \bigsqcup_{i\in\omega} g(X_j)(Y_i) \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in\omega} \bigsqcup_{j\in\omega} g(X_j)(Y_i) \\ \Leftarrow & \{K4, H1\} \\ & \forall j.\ \bigsqcup_{i\in\omega} g(X_j)(Y_i) \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in\omega} \bigsqcup_{j\in\omega} g(X_j)(Y_i) \\ \Leftarrow & \{H3, K1, K3\} \\ & \forall j, i.\ g(X_j)(Y_i) \sqsubseteq \bigsqcup_{j\in\omega} g(X_j)(Y_i) \\ & \{\text{dies gilt wegen } K2 \text{ und } H2\} \end{array}$$

Richtung $\sqsupseteq$:

$$\begin{array}{ll} & \bigsqcup_{i\in\omega} \bigsqcup_{j\in\omega} g(X_j)(Y_i) \sqsubseteq \bigsqcup_{j\in\omega} \bigsqcup_{i\in\omega} g(X_j)(Y_i) \\ \Leftarrow & \{K3, H1\} \\ & \forall i.\ \bigsqcup_{j\in\omega} g(X_j)(Y_i) \sqsubseteq \bigsqcup_{j\in\omega} \bigsqcup_{i\in\omega} g(X_j)(Y_i) \\ \Leftarrow & \{H3, K2, K4\} \\ & \forall i, j.\ g(X_j)(Y_i) \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in\omega} g(X_j)(Y_i) \\ & \{\text{dies gilt wegen } K1 \text{ und } H2\} \end{array}$$

Aufgabe 4 (Lösungsvorschlag)

Die Aufgabe zeigt, daß die Menge der stetigen Funktionen über cpo's selbst cpo-Struktur hat.

(a) Um die Stetigkeit zu zeigen, muß auch die Monotonie nachgewiesen werden. Wir konzentrieren uns wieder auf den interessanten Teil des Beweises: den Erhalt kleinster oberer Schranken unter Funktionsanwendung.

Wir bilden folgende Gleichungskette:

$$
\begin{aligned}
& (\lambda x.\ \textstyle\bigsqcup_{i\in\omega} f_i(x))(\bigsqcup_{j\in\omega} Y_j) \\
= \ & \{\ \lambda\text{-Kalkül: } \beta\text{-Konversion}\ \} \\
& \textstyle\bigsqcup_{i\in\omega} f_i(\bigsqcup_{j\in\omega} Y_j) \\
= \ & \{\ f_i \text{ stetig}\ \} \\
& \textstyle\bigsqcup_{i\in\omega} \bigsqcup_{j\in\omega} f_i(Y_j) \\
= \ & \{\ \text{Vertauchungstheorem mit } g = \lambda xy.\ x(y) \text{ (siehe unten)}\ \} \\
& \textstyle\bigsqcup_{j\in\omega} \bigsqcup_{i\in\omega} f_i(Y_j) \\
= \ & \{\ \lambda\text{-Kalkül: } \beta\text{-Konversion}\ \} \\
& \textstyle\bigsqcup_{j\in\omega} (\lambda x.\ \bigsqcup_{i\in\omega} f_i(x))(Y_j)
\end{aligned}
$$

In der obigen Gleichungskette haben wir eine stärkere Version des Vertauchungstheorems

$$\bigsqcup_{i\in\omega} \bigsqcup_{j\in\omega} g(X_i)(Y_j) = \bigsqcup_{j\in\omega} \bigsqcup_{i\in\omega} g(X_i)(Y_j)$$

aus Aufgabe 3a auf Blatt 4 angewendet. Dort wurde das Theorem für eine in "beiden Argumenten" monotone Funktion g vom Typ $\alpha \to \beta \to \gamma$ bewiesen, wobei angenommen wurde, daß die Typen α,β und γ cpo's sind. Eine Analyse des dortigen Beweises zeigt aber, daß für α und β die Eigenschaften einer partiellen Ordnung ausreichen. Lediglich γ muß eine cpo sein. Aus eben diesem Grund dürfen wir das Vertauchungstheorem hier auch verwenden, denn von der Kette $(f_i)_{i\in\omega}$ wissen wir lediglich, daß sie eine Kette in der partiell geordneten Menge der stetigen Funktionen ist. Die cpo-Eigenschaft wollen wir ja gerade erst nachweisen!

(b) Wir zeigen zuerst, daß $\lambda x.\ \bigsqcup_{i\in\omega} f_i(x)$ eine obere Schranke der Kette $(f_i)_{i\in\omega}$ ist. Zu zeigen ist also:

$$\forall i.\ f_i \sqsubseteq \lambda x.\ \bigsqcup_{i\in\omega} f_i(x)$$

Gemäß der punktweisen Ordnung im Funktionenraum gilt dies genau dann, wenn:

$$\forall i.\forall y.\ f_i(y) \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in\omega} f_i(y)$$

Dies gilt aber, da für jedes y die Folge $(f_i(y))_{i\in\omega}$ eine Kette im Wertebereich der Funktionen f_i bildet. Der Wertebereich hat nach Voraussetzung eine cpo-Struktur. Die Aussage folgt somit aus der Existenz der kleinsten oberen Schranke und deren Eigenschaften.

Wir zeigen weiter, daß die Funktion $\lambda x.\ \bigsqcup_{i\in\omega} f_i(x)$ die kleinste oberer Schranke ist. Sei dazu g eine beliebige obere Schranke für die Kette $(f_i)_{i\in\omega}$.

$$
\begin{array}{ll}
 & \forall i.\ f_i \sqsubseteq g \\
\Leftrightarrow & \{\ \text{punktweise Ordnung}\ \} \\
 & \forall i. \forall x.\ f_i(x) \sqsubseteq g(x) \\
\Rightarrow & \{\ \text{Eigenschaft von}\ \bigsqcup\ \} \\
 & \forall x.\ \bigsqcup_{i \in \omega} f_i(x) \sqsubseteq g(x) \\
\Leftrightarrow & \{\ \lambda\text{-Kalkül: } \beta\text{-Konversion}\ \} \\
 & \forall x.\ (\lambda x.\ \bigsqcup_{i \in \omega} f_i(x))(x) \sqsubseteq g(x) \\
\Leftrightarrow & \{\ \text{punktweise Ordnung}\ \} \\
 & \lambda x.\ \bigsqcup_{i \in \omega} f_i(x) \sqsubseteq g
\end{array}
$$

Dies zeigt, daß $\lambda x.\ \bigsqcup_{i \in \omega} f_i(x)$ die kleinste obere Schranke von $(f_i)_{i \in \omega}$ ist.