Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Gerwin Klein

WS 1999/2000
Übungsblatt 9
10. 1. 2000

Übungen zur Semantik von Programmiersprachen

Aufgabe 1 **(H)** *(Monotonie und Stetigkeit)*
Abgabetermin: Dienstag, 18.1.2000

Seien $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ cpos. Eine Funktion $f : D \to E$ ist stetig, wenn für alle ω-Ketten $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in D gilt:

$$f(\bigsqcup_i d_i) \sqsubseteq_E \bigsqcup_i f(d_i) \ \wedge\ \bigsqcup_i f(d_i) \sqsubseteq_E f(\bigsqcup_i d_i)$$

Zeigen Sie, daß eine der beiden Richtungen bereits gilt, wenn f monoton ist.

Aufgabe 2 **(H)** *(Partielle und totale Funktionen)*
Abgabetermin: Dienstag, 18.1.2000

Geben Sie eine bijektive Abbildung φ zwischen der Menge der partiellen Funktionen $A \nrightarrow B$ und der Menge der totalen Funktionen $A \to B_\perp$ an. Zeigen Sie, daß eine partielle Funktion genau dann in einer zweiten enthalten ist, wenn die entsprechenden totalen Funktionen punktweise geordnet sind, d.h. daß für alle $f_0, f_1 \in A \nrightarrow B$ gilt

$$f_0 \subseteq f_1 \Leftrightarrow (\forall a \in A.(\varphi(f_0))(a) \sqsubseteq (\varphi(f_1))(a)) \ .$$

Aufgabe 3 **(H)** *(Kleinste Fixpunkte)*
Abgabetermin: Dienstag, 18.1.2000

Geben sei folgendes WHILE-Statement w:

$$\textbf{while}\ \neg(x = 1)\ \textbf{do}\ (y := y * x;\ x := x - 1)$$

(a) Geben Sie das Funktional Γ zu w an.
(b) Geben Sie (mit Beweis) den kleinsten Fixpunkt von Γ an.
(c) Geben Sie (mit Beweis) einen weiteren Fixpunkt von Γ an.

Aufgabe 4 **(Ü)** *(Monotonie und Stetigkeit)*

Seien D und E cpos. Seien weiterhin alle ω-Ketten in D stationär, d.h. gelte für alle Folgen $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in D

$$d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq \ldots \Rightarrow (\exists N \in \mathbb{N}. \forall m \geq N. d_m = d_N) \ .$$

Zeigen Sie, daß jede monotone Funktion von D nach E stetig ist.

Aufgabe 5 **(Ü)** *(Fixpunkte von monotonen Funktionen)*

Sei P eine cpo mit $\perp$. Sei $f : P \to P$ eine monotone Funktion. Der Fixpunktsatz $fix(f) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$ läßt sich dann für f nicht anwenden, denn dazu wird die Stetigkeit der Funktion f gefordert.

(a) Zeigen Sie, daß für monotones f folgende Einschränkung gilt:

Wenn $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$ ein Fixpunkt von f ist, dann ist es auch der kleinste Fixpunkt.

(b) Folgern Sie daraus, daß gilt:

Wenn für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt, daß $f^{n+1}(\perp) = f^n(\perp)$,

dann ist $f^n(\perp)$ der kleinste Fixpunkt von f.

Aufgabe 6 **(Ü)** *(Denotationelle Semantik von* **repeat***)*

Erweitern Sie die denotationelle Semantik der Sprache WHILE um das **repeat**-Konstrukt. Prüfen Sie, ob die Semantik mit Ihrer Erweiterung weiterhin wohldefiniert ist.