Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Gerwin Klein

WS 1999/2000
Übungsblatt 14
14. 2. 2000

Übungen zur Semantik von Programmiersprachen

Aufgabe 1 **(H)** (*Totale Korrektheit*) **(Abgabe: Dienstag, 22. 2. 2000)**

Gegeben sei folgendes Programm:

$$
\begin{array}{l}
\{\ 0 \leq N_0\ \} \\
\quad N := 0;\ P := 1;\ C := 0; \\
\quad \textbf{while}\ \neg(N = N_0)\ \textbf{do} \\
\quad\quad \textbf{if}\ C = 0\ \textbf{then}\ (N := N+1;\ C := P) \\
\quad\quad\quad\quad\quad \textbf{else}\ \ (C := C-1;\ P := P+1); \\
\quad P := P + C \\
\{\ P = ?\ \}
\end{array}
$$

(a) Was ist der Wert von P nach Ausführung des Programms?

(b) Wie lautet die Invariante der Schleife?

(c) Zeigen Sie die totale Korrektheit des Programms.

Aufgabe 2 **(Ü)** (*Zeitkomplexität*)

Gegeben sei folgende Implementierung des euklidischen Algorithmus' zur Berechung des größten gemeinsamen Teilers der Zahlen m und n:

$$
\begin{array}{l}
\{M = m \wedge N = n \wedge 1 \leq m \wedge 1 \leq n\} \\
\textbf{while}\ \neg(M = N)\ \textbf{do}\ (\textbf{if}\ M \leq N\ \textbf{then}\ N := N - M\ \textbf{else}\ M := M - N) \\
\{M = gcd(m,n)\}
\end{array}
$$

Beweisen Sie die Korrektheit des Programms und zeigen Sie mit Hilfe des Erweiterten Hoare-Kalküls, daß die Ausführungszeit des Programms höchstens $\mathcal{O}(n+m)$ ist.

Dabei dürfen Sie folgende Hilfssätze über den größten gemeinsamen Teiler benutzen:

$$\forall x, y\ .\ 1 \leq x \wedge 1 \leq y \wedge x < y \Rightarrow gcd(x, y-x) = gcd(x,y)$$

$$\forall x\ .\ 1 \leq x \Rightarrow gcd(x,x) = x$$

$$\forall x, y\ .\ 1 \leq x \wedge 1 \leq y \Rightarrow gcd(x,y) = gcd(y,x)$$

Aufgabe 3 **(Ü)** (*Arrays*)

Zeigen Sie die Gültigkeit folgenden Hoare-Tripels:

$$\{A[I] = I\}\ A[A[I]] := I\ \{A[I] = I\}$$

Aufgabe 4 **(Ü)** (*Verifikationsbedingungen*)

Die Funktion vc aus der Vorlesung stützt sich bei der Berechnung von Verifikationsbedingungen ausschließlich auf ein Statement s und eine Nachbedingung B, so daß

$$vc(s, B) \Rightarrow\ \models \{pre(s, B)\}\ s\ \{B\}$$

(a) Geben Sie eine analoge Funktion vc' an, die Verifikationsbedingungen zu vollständigen Hoare-Tripeln $\{A\}\ s\ \{B\}$ berechnet.

(b) Zeigen Sie die Korrektheit von vc' in Bezug auf die Funktionen pre und vc aus der Vorlesung.

Aufgabe 5 **(P)** (*Zeitkomplexität*)
(Abgabe: Dienstag, 22. 2. 2000 an kleing@in.tum.de)

Erweitern Sie die Big-Step-Semantik der Sprache WHILE in Prolog um die Berechnung der exakten Laufzeit des Programms.

Sie können dazu die Lösung der Programmieraufgabe von Blatt 2 verwenden.

Hinweis:

Am **29.2.2000** findet statt der Übung die **Semestralprüfung** statt. Teilnahmeberechtigt sind alle Studierenden, die mindestens 40% der Punkte aus den Haus- und Programmieraufgaben erreicht haben. Wenn Sie an dieser mündlichen Semestralprüfung teilnehmen möchten, melden Sie sich bitte bis spätestens 22.2.2000 per E-mail an kleing@in.tum.de an. Sie erhalten dann Antwort, ob Sie die Zulassungsvoraussetzungen zur Prüfung erfüllt haben.