Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2019 – Übungsblatt 10

AUFGABE 10.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Reduktion
- Satz von Rice
- PCP

AUFGABE 10.2. (*Falsche Reduktionen*) Stufe B

Sei $\mathsf{H}_0 := \{w \mid \exists \mathsf{M}.\, \mathsf{enc}(\mathsf{M}) = w \wedge \mathsf{M}[\varepsilon]\downarrow\}$ und sei $A := \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in \mathbb{N}_0.\ |w| = 5i + 3\}$ mit $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Erklären Sie, warum die angegebenen Funktionen keine Reduktionen gemäß Vorlesungsdefinition sind.

(a) Behauptung: $\mathsf{H}_0 \leq A$
Reduktion:

$$f(w) = \begin{cases} \mathsf{aaa} & \text{falls } w \in \mathsf{H}_0 \\ \mathsf{b} & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Behauptung: $A \leq \mathsf{H}_0$
Reduktion: f bildet jedes Element $x \in \Sigma^*$ auf die Kodierung einer TM M_x, die wie folgt definiert ist: Die TM M_x löscht die Eingabe und schreibt x aufs Band, bestimmt dann die Länge von x, zieht 3 ab und prüft anschließend, ob das Ergebnis durch 5 teilbar ist. Dementsprechend gibt die Maschine "Ja" (1) und "Nein" (0) aus.

(c) Behauptung: $\overline{\mathsf{H}_0} \leq \mathsf{H}_0$
Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $\mathsf{M}_{f(w)}$ ab, die $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ simuliert. Falls M_w hält, geht $\mathsf{M}_{f(w)}$ in eine Endlosschleife. Falls $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ nicht hält, hält $\mathsf{M}_{f(w)}$.

(d) Behauptung: $H_{\Sigma^*} \leq \mathsf{H}_0$ mit $H_{\Sigma^*} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists \mathsf{M}.\mathsf{enc}(\mathsf{M}) = w \wedge \forall x \in \Sigma^*.\ \mathsf{M}[x]\downarrow\}$.
Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $\mathsf{M}_{f(w)}$ ab, die erst die Eingabe löscht und nicht deterministisch $x \in \Sigma^*$ erzeugt und dann $\mathsf{M}_w[x]$ simuliert.

AUFGABE 10.3. (*Satz von Rice*) Stufe C

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen unentscheidbar für $\Sigma = \{0,1\}$ sind, und begründen Sie Ihre Antworten mit dem Satz von Rice (falls anwendbar). Geben Sie dabei die Menge $\mathcal{F}$ genau an und argumentieren Sie, warum die Menge nicht trivial ist.

(a) $\mathsf{L}_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\} \text{ ist regulär}\}$
(b) $\mathsf{L}_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}_0.\ \varphi_w(n) = n * (n - 23) + 42\}$
(c) $\mathsf{L}_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall p \in \mathbb{N}_0.\ (|w| > p \wedge p \text{ ist prim}) \rightarrow w_p = 0\}$

Hinweis: $w_p \in \Sigma$ bezeichnet den Buchstaben an der p-ten Stelle im Wort w.

AUFGABE 10.4. (*Reduktionen*) Stufe C

Betrachten Sie die folgende Menge:

$$A := \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists \mathsf{M}.w = \mathsf{enc}(\mathsf{M}) \wedge \exists x \in \{0,1\}^*.\ \varphi_{\mathsf{M}}(x) = |x|\},$$

wobei φ_{M} die von M berechnete Funktion ist.
Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) A ist nicht entscheidbar.
  (i) Geben Sie eine passende Reduktion von H_0 an und begründen Sie deren Korrektheit. Verwenden Sie $\mathsf{H}_0 := \{w \mid \exists \mathsf{M}.w = \mathsf{enc}(\mathsf{M}) \wedge \mathsf{M}[\varepsilon]\downarrow\}$.
  (ii) Verwenden Sie den Satz von Rice.
(b) A ist semi-entscheidbar.
(c) $\overline{A}$ ist nicht semi-entscheidbar.

AUFGABE 10.5. (*PCP*) Stufe B - D

Wir betrachten in dieser Aufgabe das Post'sche Korrespondenzproblem (PCP).

(a) Bestimmen Sie *alle* Lösungen für das folgende PCP: $P_1 = ((d, cd), (d, d), (abc, ab))$.
(b) Zeigen Sie, dass die folgende Instanz des PCPs keine Lösung hat: $P_2 = ((ab, aba), (baa, aa), (aba, baa))$.
(c) Zeigen Sie, dass das Post'sche Korrespondenzproblem über einem Alphabet mit nur einem Symbol entscheidbar ist, indem Sie einen Algorithmus angeben. Begründen Sie auch dessen Korrektheit.

(d) Sei $P = (c_1, c_2)$ ein PCP über einem beliebigem Alphabet Σ mit $c_i = (x_i, y_i)$ und $||x_i| - |y_i|| = 1$ für $i \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie die Entscheidbarkeit für diese Variante des PCPs. Geben Sie hierzu einen Algorithmus an und begründen Sie dessen Korrektheit.

AUFGABE 10.6. (*Entscheidbarkeit und kontextfreie Grammatiken*) Stufe D

Seien $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ CFGs. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(a) $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \not\subseteq \mathsf{L}(\mathsf{G}_2)$ ist semi-entscheidbar.

(b) $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \subseteq \mathsf{L}(\mathsf{G}_2)$ ist unentscheidbar.

Hinweis: Betrachten Sie den Beweis für die Unentscheidbarkeit von $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \cap \mathsf{L}(\mathsf{G}_2) = \emptyset$ aus der Vorlesung.