Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2019 – Übungsblatt Lösungsskizze 5

AUFGABE 5.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- MyHill-Nerode-Relation
- Äquivalenzklasse
- Kanonischer Minimalautomat

AUFGABE 5.2. (*Myhill-Nerode-Relation und Äquivalenzklassen*) Stufe B

Sei $\mathsf{L} = \mathsf{L}(\mathsf{a}^*\mathsf{b}^*\mathsf{c}^*)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$.

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Äquivalenzen wahr sind und begründen Sie Ihre Antwort:

- $\varepsilon \overset{?}{\equiv}_{\mathsf{L}} \mathsf{a}$
- $\mathsf{b} \overset{?}{\equiv}_{\mathsf{L}} \mathsf{c}$
- $\mathsf{abc} \overset{?}{\equiv}_{\mathsf{L}} \mathsf{cba}$

(b) Sei $v = \mathsf{aababc}$. Geben Sie ein Wort $u \neq v$ an, so dass $u \equiv_{\mathsf{L}} v$.

(c) Geben Sie die Mengen $[\mathsf{ab}]_{\mathsf{L}}$, $[\mathsf{bc}]_{\mathsf{L}}$ und $[\mathsf{ca}]_{\mathsf{L}}$ an.

(d) Finden Sie nun L', so dass $\mathsf{c} \equiv_{\mathsf{L}'} \mathsf{ba}$, $\mathsf{c} \not\equiv_{\mathsf{L}'} \mathsf{ab}$ und $\mathsf{aba} \equiv_{\mathsf{L}'} \mathsf{bab}$. Weiterhin soll $\varepsilon, \mathsf{aba} \in \mathsf{L}'$ gelten.

Lösungsskizze

(a)
- $\varepsilon \equiv_{\mathsf{L}} \mathsf{a}$, da $\forall w \in \Sigma^*.\ w \in \mathsf{L} \Leftrightarrow \mathsf{a}w \in \mathsf{L}$.
- $\mathsf{b} \not\equiv_{\mathsf{L}} \mathsf{c}$, da $\mathsf{bb} \in \mathsf{L}$ aber $\mathsf{cb} \notin \mathsf{L}$.
- $\mathsf{abc} \not\equiv_{\mathsf{L}} \mathsf{cba}$, da $\mathsf{abc} \in \mathsf{L}$ aber $\mathsf{cba} \notin \mathsf{L}$.

(b) ba

(c) $[\mathsf{ab}]_{\mathsf{L}} = \mathsf{L}(\mathsf{a}^*\mathsf{b}^+)$, $[\mathsf{bc}]_{\mathsf{L}} = \mathsf{L}(\mathsf{a}^*\mathsf{b}^*\mathsf{c}^+)$ und $[\mathsf{ca}]_{\mathsf{L}} = \mathsf{L}(\mathsf{a}^*\mathsf{b}^+\mathsf{a} \mid \mathsf{a}^*\mathsf{b}^*\mathsf{c}^+(\mathsf{a} \mid \mathsf{b}))\Sigma^*$.

(d) $\mathsf{L}^{'} = \{\varepsilon, \mathsf{aba}, \mathsf{bab}, \mathsf{c}, \mathsf{ba}, \mathsf{cb}\}$.

AUFGABE 5.3. (*Anwendungsbeispiel kontextfreie Grammatiken*) Stufe B

Betrachten Sie die folgende Grammatik $\mathsf{G} = (\{J, D, T, N, N', Z, A, S, E, U, B, C, V, U', B'\}$,
$\{;, \{, \}, (,), =, a, b, \ldots, y, z, 0, 1, \ldots, 8, 9, +, -, \cdot, /, \%, !, <, >, \&\&, ||\}, \mathsf{P}, J)$ mit den Produktionen $\mathsf{P} :=$

$J \to DS \mid S$
$D \to TN; D \mid TN;$
$T \to int$
$N \to AN'$
$N' \to AN' \mid ZN' \mid A \mid Z$
$A \to a \mid b \mid c \mid \cdots \mid y \mid z$
$Z \to 0 \mid 1 \mid \cdots \mid 8 \mid 9$
$S \to SS \mid; \mid \{S\} \mid N = E; \mid N = read(); \mid write(E); \mid if(C)\ S\ else\ S \mid while(C)\ S$
$E \to Z \mid N \mid (E) \mid UE \mid EBE$
$U \to -$
$B \to - \mid + \mid \cdot \mid / \mid \%$
$C \to true \mid false \mid (C) \mid EVE \mid U'(C) \mid CB'C$
$V \to == \mid != \mid <= \mid < \mid >= \mid >$
$U' \to !$
$B' \to \&\& \mid ||$

(a) Was für eine Sprache erzeugt diese Grammatik?

(b) Beurteilen Sie die folgende Aussagen: Alle Worte in $\mathsf{L}(\mathsf{G})$ können zu einem funktionierenden Programm compiliert werden.

(c) Geben Sie ein gültiges Wort in der Sprache an, das alle Nichtterminale mindestens einmal verwendet.

(d) Zeichnen Sie den Syntaxbaum für das in Teilaufgabe (c) gefundene Wort.

Lösungsskizze

(a) Alle syntaktisch korrekten MiniJava Programme (siehe Vorlesung: Einführung in die Informatik 1)

(b) Die Aussage ist falsch. Die semantische Korrektheit des Programms kann durch die Grammatik nicht sichergestellt werden, nur die syntaktische. Es können zum Beispiel Variablen verwendet werden, die nicht deklariert sind.

(c) $int\ x1;$
$while(!(x2 > 0))$
$\{if(x3 == x4\ \&\&\ true)\ write(x5);\ else\ x7 = -1\%5;\}$

AUFGABE 5.4. (*Sprache einer kontextfreien Grammatik*) Stufe D

Mit $\mathsf{G} = (\{\mathsf{S}, \mathsf{T}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \mathsf{P}, \mathsf{S})$ sei die CFG mit folgenden Produktionen P bezeichnet:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{S} & \to & \mathsf{TaT} \\ \mathsf{T} & \to & \mathsf{aTb} \mid \mathsf{bTa} \mid \mathsf{TT} \mid \mathsf{aT} \mid \varepsilon \end{array}$$

Die Sprache $\mathsf{L_T(G)}$ die ausgehend von T als Startsymbol erzeugt wird ist $\mathsf{L} = \{w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \mid |w|_\mathsf{a} \geq |w|_\mathsf{b}\}$.

(a) Wir beweisen zunächst ein Lemma das in der folgenden Teilaufgabe hilfreich sein wird. Zeigen Sie dass für jedes $w \in \mathsf{L}$ das mit b beginnt eine Zerlegung $\mathsf{b}x\mathsf{a}y$ existiert, so dass $x, y \in \mathsf{L}$. Verwenden Sie hierzu eine Höhenfunktion wie in der Vorlesung im Beweis zu Satz 4.16.
Außerdem dürfen Sie im Folgenden ohne Beweis verwenden, dass für alle $w \in \mathsf{L}$ die mit a beginnen und für die $|w|_\mathsf{a} = |w|_\mathsf{b}$ gilt, eine Zerlegung $\mathsf{a}x\mathsf{b}y$ existiert, so dass $x, y \in \mathsf{L}$.

(b) Zeigen sie nun $\mathsf{L_T(G)} = \mathsf{L}$ unter Verwendung der Lemmas aus der vorigen Aufgabe.

(c) Welche Sprache erzeugt G ausgehend von S?

Lösungsskizze

(a) Sei $w = x_1 \dots x_n$. Wir definieren eine Höhenfunktion $h(i) := |x_1 \dots x_i|_\mathsf{b} - |x_1 \dots x_i|_\mathsf{a}$. Da $w \in \mathsf{L}$, wissen wir dass $h(n) \leq 0$. Außerdem gilt $h(1) = 1$, da w mit b beginnt. Da sich h mit jedem weiteren Zeichen nur um 1 verändert, muss es also ein j geben, so dass $h(j) = 0$. Wir wählen das kleinste solche j und können mit $h(j-1) = 1$ schließen dass $x_j = \mathsf{a}$. Damit ergibt sich für w insgesamt:

$$w = \mathsf{b}x_2 \dots x_{j-1}\mathsf{a}x_{j+1} \dots x_n$$

Wegen $h(j) = 0$ wissen wir, dass $x_2 \dots x_{j-1}$ gleich viele a's und b's enthält, es gilt also $x_2 \dots x_{j-1} \in \mathsf{L}$. Wegen $h(n) \leq 0$ gilt außerdem, dass $x_{j+1} \dots x_n$ mindestens so viele a's wie b's enthält, womit $x_{j+1} \dots x_n \in \mathsf{L}$ folgt.
Ein analoger Beweis lässt sich für $w \in \mathsf{L}$ führen die mit a beginnen und für die $|w|_\mathsf{a} = |w|_\mathsf{b}$ gilt. Hier beginnt man mit $h(1) = -1$ und findet das kleinste j so dass $h(j) = 0$ um zu zeigen, dass eine Zerlegung $\mathsf{a}x\mathsf{b}y$ von w existiert, so dass $x, y \in \mathsf{L}$.

(b) Wir zeigen $\mathsf{L_T(G)} = \mathsf{L}$.

(i) $\mathsf{L_T(G)} \subseteq \mathsf{L}$.
Sei $w \in \mathsf{L_T(G)}$ beliebig. Das heißt es existiert eine Ableitung $\mathsf{T} \to^* w$. Wir zeigen $w \in \mathsf{L}$ mit Induktion über die Erzeugung von w.
- $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in \mathsf{L}$
- $w = \mathsf{a}u\mathsf{b}$: Mit der Induktionshypothese gilt $|u|_a \geq |u|_b$. Daraus folgt $|\mathsf{a}u\mathsf{b}|_a \geq |\mathsf{a}u\mathsf{b}|_b$ und damit $\mathsf{a}u\mathsf{b} \in \mathsf{L}$.
- $w = \mathsf{b}u\mathsf{a}$: Analog.
- $w = \mathsf{a}u$: Analog.
- $w = uv$: Mit der Induktionshypothese gelten $|u|_a \geq |u|_b$ und $|v|_a \geq |v|_b$. Damit folgt $uv \in \mathsf{L}$.

(ii) $\mathsf{L} \subseteq \mathsf{L_T(G)}$
Sei $w \in \mathsf{L}$ beliebig. Wir zeigen $w \in \mathsf{L_T(G)}$ mit vollständiger Induktion über $|w|$.
Induktionsbasis: Folgt direkt aus $\varepsilon \in \mathsf{L_T(G)}$.
Induktionshypothese: Für alle w mit $|w| \leq n$ gilt $w \in \mathsf{L} \Longrightarrow w \in \mathsf{L_T(G)}$
Induktionsbehauptung: Für alle w mit $|w| = n+1$ gilt $w \in \mathsf{L} \Longrightarrow w \in \mathsf{L_T(G)}$
Sei $w \in \mathsf{L}$ beliebig mit $|w| = n+1$.

i. Beginnt w mit einem b gibt es nach Aufgabe (a) eine Zerlegung $\mathsf{b}x\mathsf{a}y$ von w mit $x, y \in \mathsf{L}$. Damit können wir w wie folgt ableiten: $\mathsf{T} \to \mathsf{TT} \to \mathsf{bTaT} \to^* \mathsf{b}x\mathsf{a}y = w$ wobei der letzte Schritt mit der IH folgt.

ii. Ist w von der Form $\mathsf{a}x$ gibt es zwei weitere Fälle. Entweder es gilt $|x|_\mathsf{a} \geq |x|_\mathsf{b}$, dann folgt mit der IH die Ableitung $\mathsf{T} \to \mathsf{aT} \to^* \mathsf{a}x = w$.
Andernfalls muss $|x|_\mathsf{a} = |x|_\mathsf{b} - 1$ gelten, da w sonst nicht in L wäre. Dann gibt es nach Aufgabe (a) eine Zerlegung $\mathsf{a}y\mathsf{b}z$ von w mit $y, z \in \mathsf{L}$ und wir leiten w wie folgt ab: $\mathsf{T} \to \mathsf{TT} \to \mathsf{aTbT} \to^* \mathsf{a}y\mathsf{b}z = w$.

(c) $\mathsf{L}(\mathsf{G})$ enthält alle Wörter der Form $x\mathsf{a}y$ mit $x, y \in \mathsf{L}_\mathsf{T}(\mathsf{G})$. Damit gilt $\mathsf{L} = \{w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \mid |w|_\mathsf{a} > |w|_\mathsf{b}\}$.

AUFGABE 5.5. (*Myhill-Nerode-Relation*) Stufe D

Entscheiden Sie, ob folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ regulär sind. Bestimmen Sie hierzu die Äquivalenzklassen der dazugehörigen Myhill-Nerode-Relation. Falls die Sprache regulär ist, zählen Sie alle Äquivalenzklassen auf und zeichnen Sie den kanonischen Minimalautomat $M_\mathsf{L} = (\Sigma^* / \equiv_\mathsf{L}, \Sigma, \delta_\mathsf{L}, [\varepsilon]_{\equiv_\mathsf{L}}, F_\mathsf{L})$. Falls die Sprache nicht regulär ist, reicht es eine unendliche Menge von Äquivalenzklassen zu bestimmen.

(a) $\mathsf{L}_1 = \{\mathsf{a}^{2i} \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
(b) $\mathsf{L}_2 = \{\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i\mathsf{c}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
(c) $\mathsf{L}_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_\mathsf{a} = 2 \cdot |w|_\mathsf{b}\}$
(d) $\mathsf{L}_4 = \mathsf{L}((\mathsf{a}^*(\mathsf{b} \mid \mathsf{c}))^*)$
(e) $\mathsf{L}_5 = \{w\mathsf{c}w \mid w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^*\}$

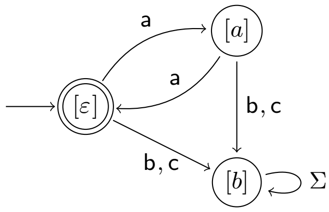
Lösungsskizze

Hinweis: Da die Sprachen aus dem Kontext ersichtlich ist, lassen wir den L_i Subscript bei $\equiv$ und $[w]$ weg.

(a)
- Bestimmen der Äquivalenzklassen:

$$[\varepsilon] = \mathsf{L}_1 \qquad [\mathsf{a}] = \{\mathsf{a}^{2i+1} \mid i \in \mathbb{N}_0\} \qquad [\mathsf{b}] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b > 0 \lor |w|_c > 0\}$$

- Kanonischer DFA:

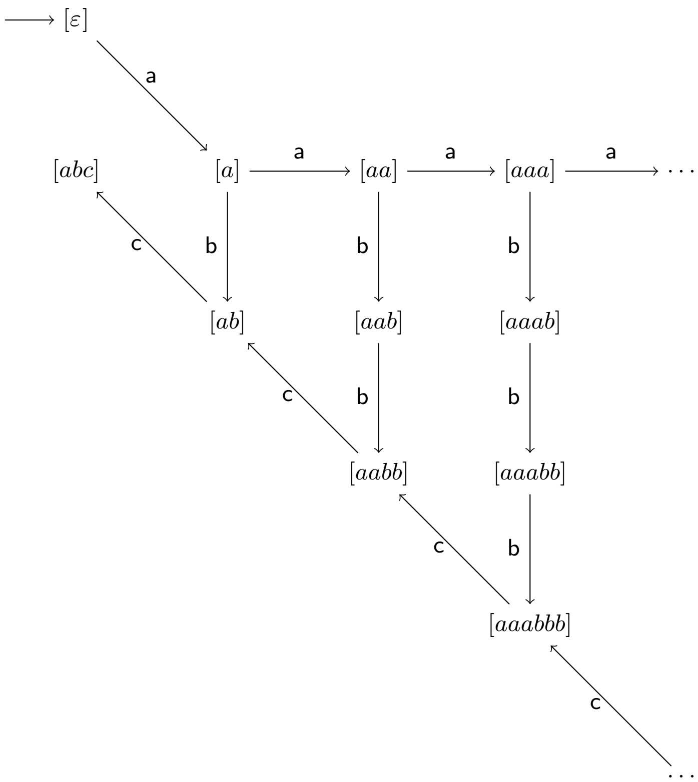


(b)
- Bestimmen einer unendlichen Menge von Äquivalenzklassen:

$$\{[\mathsf{a}^i] \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Beweis: Sei $i, j \in \mathbb{N}_0$ verschieden. Dann $\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i\mathsf{c}^i \in \mathsf{L}_2$, aber $\mathsf{a}^j\mathsf{b}^i\mathsf{c}^i \notin \mathsf{L}_2$. Daher $[\mathsf{a}^i] \neq [\mathsf{a}^j]$. Somit ist die Menge unendlich und L_2 keine reguläre Sprache.

- Unendliches Transitionssystem (Ablehnende Äquivalenzklasse und entsprechende Transitionen sind nicht gezeichnet):



(c) • Bestimmen einer unendlichen Menge von Äquivalenzklassen:

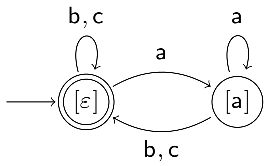
$$\{[\mathsf{b}^i] \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Beweis: Sei $i, j \in \mathbb{N}_0$ verschieden. Dann $\mathsf{b}^i\mathsf{a}^{2\cdot i} \in \mathsf{L}_3$, aber $\mathsf{b}^j\mathsf{a}^{2\cdot i} \notin \mathsf{L}_3$. Daher $[\mathsf{b}^i] \neq [\mathsf{b}^j]$. Somit ist die Menge unendlich und L_3 keine reguläre Sprache.

(d) • Bestimmen der Äquivalenzklassen:

$$[\varepsilon] = \mathsf{L}((\mathsf{a}^*(\mathsf{b} \mid \mathsf{c}))^*) = \mathsf{L}_4 \qquad [\mathsf{a}] = \mathsf{L}((\mathsf{a} \mid \mathsf{b} \mid \mathsf{c})^*\mathsf{a})$$

• Kanonischer DFA:



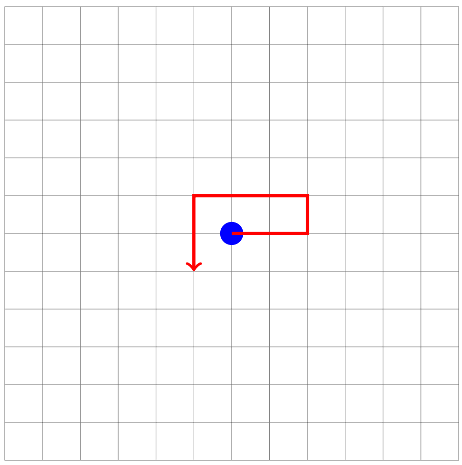
(e) • Bestimmen der unendlichen Menge von Äquivalenzklassen:

$$\{[\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i] \mid w \in \Sigma^*\}$$

Beweis: Sei $i, j \in \mathbb{N}_0$ verschieden. Dann $\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i\mathsf{c}\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i \in \mathsf{L}_5$, aber $\mathsf{a}^j\mathsf{b}^j\mathsf{c}\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i \notin \mathsf{L}_5$. Somit ist die Menge unendlich und L_5 keine reguläre Sprache.

AUFGABE 5.6. (*Pfeilsprachen*) Stufe B – D

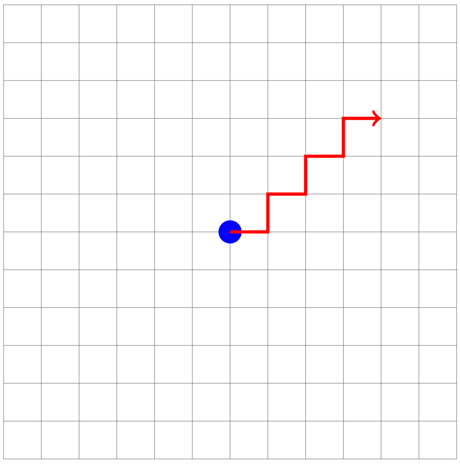
In dieser Aufgabe betrachten wir Sprachen, deren Worte Linienzüge in einem unendlichen zweidimensionalen Gitter von einem fixen Startpunkt aus beschreiben. Die folgende Grafik zeigt einen Ausschnitt aus dem Gitter:

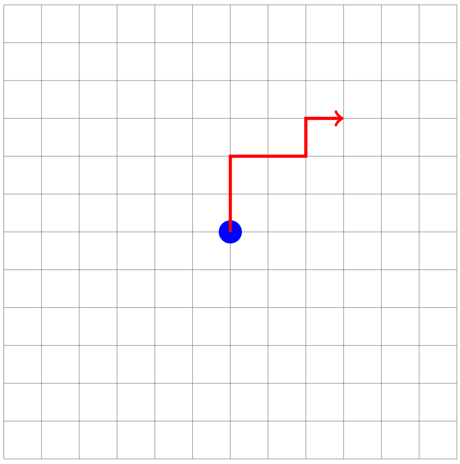


Wir haben Startpunkt blau markiert. Linienzüge beschreiben wir im Folgenden als eine Sequenz von Pfeilen, d.h. als Worte über dem Alphabet $\Sigma = \{\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\}$. Die Pfeile beschreiben dabei (vom Startpunkt aus gesehen) einen ein Kästchen langen Schritt entlang des Gitters. Wir stellen daher den im Bild rot eingezeichnete Linienzug durch das Wort $w = \rightarrow\rightarrow\uparrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\downarrow\downarrow$ dar.

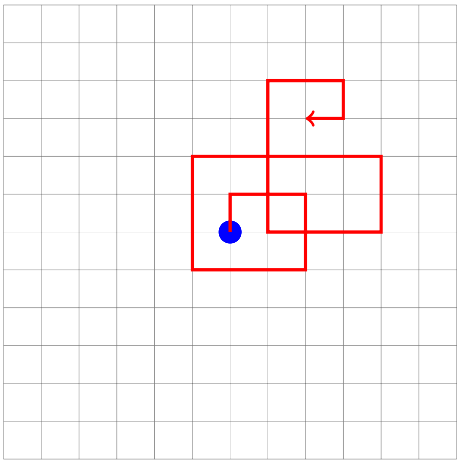
(a) Betrachten Sie die folgenden natürlich sprachlichen Beschreibungen zusammen mit jeweils einem Beispiel, welches in der Sprache liegt (auf der linken Seite), und einem Beispiel, das kein Element der Sprache ist (auf der rechten Seite). *Geben Sie für jede der Sprachen eine formale Definition der Form* $\{w \in \Sigma^* \mid \dots\}$ *an.*[1]

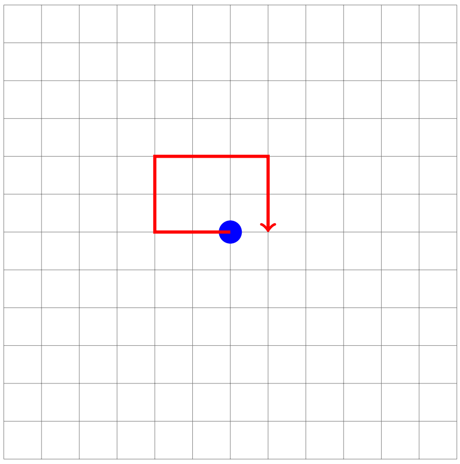
(i) die Sprache aller Treppen über dem Alphabet $\Sigma' = \{\rightarrow, \uparrow\}$



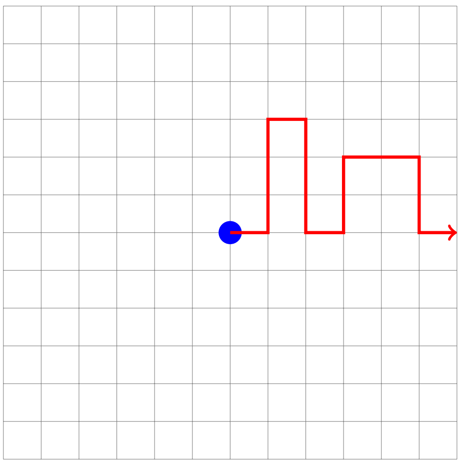


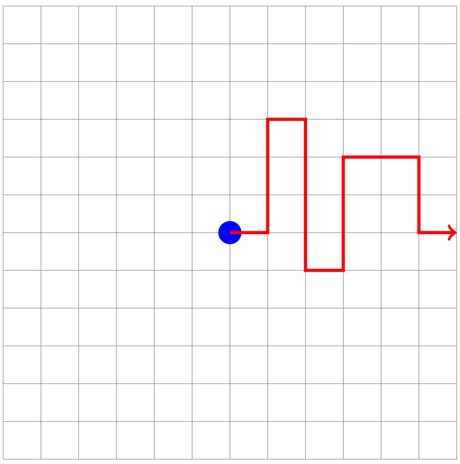
(ii) die Sprache aller im Uhrzeigersinn laufenden Spiralen über dem Alphabet Σ, die vom Startpunkt aus zuerst nach oben laufen





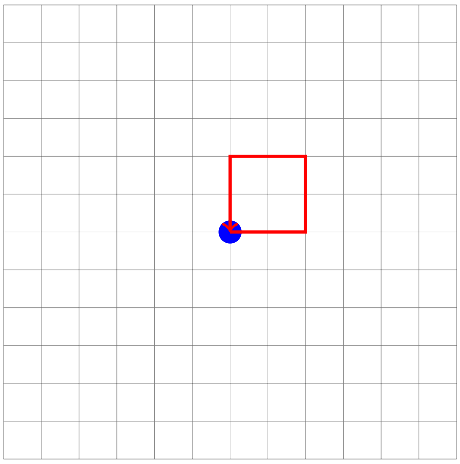
(iii) die Sprache aller "Skylines" über dem Alphabet $\Sigma'' = \{\rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$

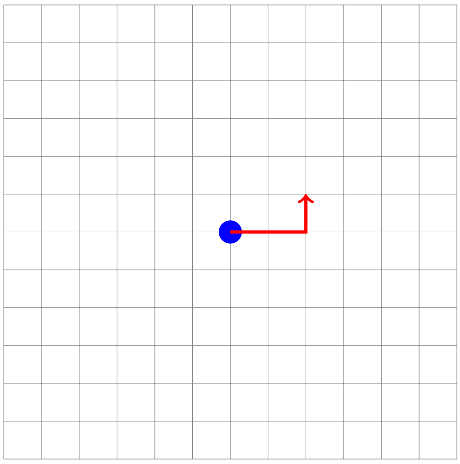




[1] Das heißt insbesondere, dass Sie in diesem Aufgabenteil keinen Automaten, keinen regulären Ausdruck, keine Grammatik oder ähnliches angeben sollen, die die Sprache beschreiben.

(iv) die Sprache aller Quadrate über dem Alphabet Σ





Hinweis: Die Sprachen sind mithilfe der Beispiele nicht eindeutig bestimmt! Ziel der Aufgabe ist es, die intuitive Beschreibung (z.B. “Sprache aller Quadrate”) zusammen mit den Beispielen in eine möglichst allgemeine Sprachdefinition zu bringen.

(b) *Stellen Sie Vermutungen auf, ob die obigen Sprachen regulär, kontextfrei bzw. kontextsensitiv sind.* Begründen Sie Ihre Antwort möglichst anschaulich anhand des Beispiels. Überlegen Sie dazu, was es für Linienzüge heißt, regulär, kontextfrei bzw. kontextsensitiv zu sein.

(c) *Geben Sie zu jeder der Sprachen* L *aus Aufgabenteil (a) eine Grammatik* G *an.*

(d) Verallgemeinern Sie Aufgabenteil (a), iv) zu der Sprache aller Rechtecke, indem Sie zunächst Beispiele von Wörtern angeben, die in der Sprache liegen bzw. nicht in der Sprache liegen, und dann die Aufgabenteile (a) bis (c) auch für diese Sprache lösen.

Lösungsskizze

(a) (i) $\mathsf{L} = \{(\rightarrow\uparrow)^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}\{\varepsilon, \rightarrow\}$

(ii) $\mathsf{L} = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*.\ uv \in \mathsf{L}((\uparrow^+\rightarrow^+\downarrow^+\leftarrow^+)^*)\}$

(iii) $\mathsf{L} = \{w \in \Sigma^* \mid (\forall u, v \in \Sigma^*.\ w = uv \rightarrow |u|_\uparrow \geq |u|_\downarrow) \wedge (\forall u, v \in \Sigma^*.\ \forall x, y \in \Sigma.\ w = uxyv \rightarrow xy \notin \{\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow\})\}$

(iv) $\mathsf{L}_1 = \{\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i\mathsf{c}^i\mathsf{d}^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Wir definieren vier Homomorphismen auf Σ (mit ihrer natürlichen Erweiterung auf Σ^*) um L_1 in Σ^* einzubetten:

$$h_1: \begin{array}{ccc} \mathsf{a} & \mapsto & \uparrow \\ \mathsf{b} & \mapsto & \rightarrow \\ \mathsf{c} & \mapsto & \downarrow \\ \mathsf{d} & \mapsto & \leftarrow \end{array} \qquad h_2: \begin{array}{ccc} \mathsf{a} & \mapsto & \rightarrow \\ \mathsf{b} & \mapsto & \downarrow \\ \mathsf{c} & \mapsto & \leftarrow \\ \mathsf{d} & \mapsto & \uparrow \end{array} \qquad h_3: \begin{array}{ccc} \mathsf{a} & \mapsto & \downarrow \\ \mathsf{b} & \mapsto & \leftarrow \\ \mathsf{c} & \mapsto & \uparrow \\ \mathsf{d} & \mapsto & \rightarrow \end{array} \qquad h_4: \begin{array}{ccc} \mathsf{a} & \mapsto & \leftarrow \\ \mathsf{b} & \mapsto & \uparrow \\ \mathsf{c} & \mapsto & \rightarrow \\ \mathsf{d} & \mapsto & \downarrow \end{array}$$

$\mathsf{L}_2 = (h_1(\mathsf{L}_1) \cup h_2(\mathsf{L}_1) \cup h_3(\mathsf{L}_1) \cup h_4(\mathsf{L}_1))$

$\mathsf{L} = \mathsf{L}_2 \cup \mathsf{L}_2^R$

(b) (i) regulär, da nur eine Alternierung konstanter Pfade verlangt wird.

(ii) regulär, da nur die Laufrichtung wichtig ist, aber nicht die Länge.

(iii) kontextfrei, da zwei Längen verglichen werden müssen.

(iv) kontextsensitiv, da vier Längen verglichen werden müssen.

(c) (i) $\mathsf{S} \mapsto \rightarrow\uparrow S \mid \rightarrow \mid \varepsilon$

(ii) $\mathsf{S} \mapsto \uparrow S \mid \uparrow T \mid \varepsilon \qquad T \mapsto \rightarrow T \mid \rightarrow U \mid \varepsilon \qquad U \mapsto \downarrow U \mid \downarrow V \mid \varepsilon \qquad V \mapsto \leftarrow V \mid \leftarrow S \mid \varepsilon$

(iii) $\mathsf{S} \mapsto T_? \mid T_? \rightarrow S \qquad T_? \mapsto \varepsilon \mid T \qquad T \mapsto \uparrow T \downarrow \mid T_? \rightarrow T_?$

(iv) Anstatt R in der Grammatik auszudrücken, verwenden wir wieder Homomorphismen. Der Index der Nichtterminale H_i^j (also i) bestimmt den Homomorphismus, der verwendet wird, um aus $ABCD$ die Terminale $\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow$ zu machen. Das Superscript bestimmt, die wievielte Seite des Quadrats gerade generiert wird. Immer, wenn das erzeugte Terminal wechselt, wird das Superscript inkrementiert.

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{S} & \mapsto & H_i^1 S' \quad (i \in [1, 8]) \\ S' & \mapsto & ABCDS' \mid ABCD \\ BA & \mapsto & AB \qquad CA \mapsto AC \qquad DA \mapsto AD \\ CB & \mapsto & BC \qquad DB \mapsto BD \\ DC & \mapsto & AB \end{array}$$

Die Homomorphismen h_i werden in der Variable H_i^j encodiert, z.B. h_1:

$$H_1^1 A \mapsto \uparrow H_1^1 \qquad H_1^2 B \mapsto \rightarrow H_1^2 \qquad H_1^3 C \mapsto \downarrow H_1^3 \qquad H_1^4 D \mapsto \leftarrow H_1^4 \qquad H_1^4 \mapsto \varepsilon$$

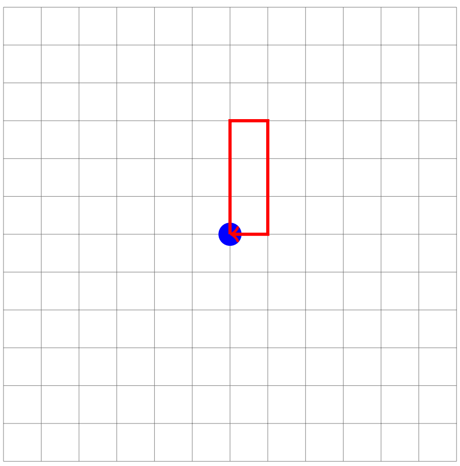
Es sind 8 Homomorphismen, weil nicht nur die 4 aus Teilaufgabe (a), sondern auch deren Umkehrungen berücksichtigt werden müssen.

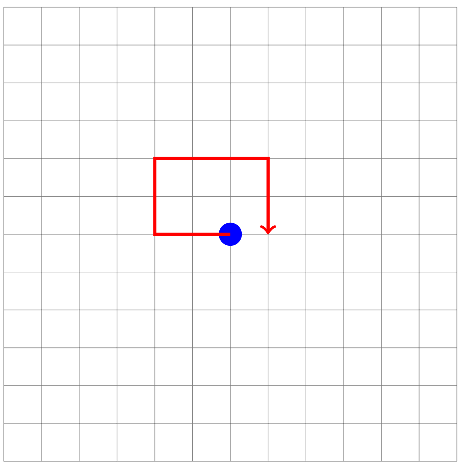
Das Superscript kann immer dann inkrementiert werden, wenn das "nächste" Nichtterminal neben dem H_i^j ist, also

$$H_i^1 B \mapsto H_i^2 B \qquad H_i^2 C \mapsto H_i^3 C \qquad H_i^3 D \mapsto H_i^4 D$$

Diese Grammatik ist zwar nicht kontext-sensitiv, kann aber mit dem üblichen Tricks in diese Form gebracht werden.

(d) Beispiele eines Wortes in der Sprache (links) bzw. nicht der Sprache (rechts):





Die formale Definition der Sprache lautet wie folgt: $\mathsf{L} = \mathsf{L}_2 \cup \mathsf{L}_2^R$, wobei $\mathsf{L}_2 = (h_1(\mathsf{L}_1) \cup h_2(\mathsf{L}_1) \cup h_3(\mathsf{L}_1) \cup h_4(\mathsf{L}_1))$ mit den vier Homomorphismen aus Aufgabenteil a,iv) und $\mathsf{L}_1 = \{\mathsf{a}^i\mathsf{b}^j\mathsf{c}^i\mathsf{d}^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$

Die Grammatik ergibt sich dann wie in Aufgabenteil c,iv)

Definition (Monoid)

Ein Monoid $\langle M, \circ, 1\rangle$ besteht aus einer (Träger-)Menge M, einer assoziativen Abbildung $\circ\colon M \times M \to M$ und einem bzgl. $\circ$ neutralen Element $1 \in M$ (d.h. $\forall m \in M.\ m \circ 1 = m = 1 \circ m$). Ist $\circ$ kommutativ, dann wird $\langle M, \circ, 1\rangle$ als kommutatives Monoid bezeichnet. Gilt $\forall m \in M.\ m \circ m = m$, so wird $\langle M, \circ, 1\rangle$ als **idempotentes** Monoid bezeichnet.

Definition (Kleene Algebra)

Eine *Kleene Algebra* $\langle K, +, \cdot, ^*, 0, 1\rangle$ besteht aus einer Trägermenge K, den binären Operationen $+\colon K \times K \to K$ (Addition), $\cdot\colon K \times K \to K$ (Multiplikation), der unären Operation $^*\colon K \to K$ (Stern) und zwei Konstanten $0, 1 \in K$. Mittels der Addition definiert man die binäre Relation $\sqsubseteq$ auf K durch

$$a \sqsubseteq b \overset{\text{Def}}{\longleftrightarrow} a + b = b$$

Wie üblich schreibt man kurz ab für $a \cdot b$. Um Klammern zu sparen, gilt “Stern vor Punkt vor Strich”.
Eine Kleene Algebra erfüllt folgende Eigenschaften für alle $a, b, c, x \in K$:

Ax1: $\langle K, +, 0\rangle$ ist ein kommutatives und idempotentes Monoid.

Ax2: $\langle K, \cdot, 1\rangle$ ist ein Monoid.

Ax3: $a(b + c) = ab + ac$ und $(a + b)c = ac + bc$.

Ax4: $a0 = 0 = 0a$.

Ax5: $1 + aa^* \sqsubseteq a^*$ und $1 + a^*a \sqsubseteq a^*$.

Ax6: $b + ax \sqsubseteq x \to a^*b \sqsubseteq x$ und $b + xa \sqsubseteq x \to ba^* \sqsubseteq x$.

AUFGABE 5.7. (*Abstraktion von Problemen*) Stufe E

In dieser Aufgabe abstrahieren wir von der konkreten Interpretation von regulären Ausdrücken als Konstruktionsbeschreibungen regulärer Sprachen. Ziel ist es den Zusammenhang mit Pfadproblemen im Bereich der Informatik und dem Lösen linearer Gleichungssysteme zu verdeutlichen.

(a) Sei Σ ein Alphabet. Beweisen Sie, dass $\langle 2^{\Sigma^*}, \cup, \circ, ^*, \emptyset, \{\varepsilon\}\rangle$ eine Kleene Algebra ist für

$$LL' := L \circ L' := \{ww' \mid w \in L, w' \in L'\} \qquad \text{und} \qquad L^* := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} L^k$$

(b) Die Addition und das Minimum auf $\mathbb{R}$ seien auf $[-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wie folgt erweitert:

$$\infty + a = \infty \quad -\infty + a = -\infty \quad -\infty + \infty = \infty$$

$$\min(a, \infty) = a \quad \min(a, -\infty) = -\infty \quad \min(-\infty, \infty) = -\infty$$

Weiterhin gelte:

$$a^* := \begin{cases} -\infty & \text{falls } a \in [-\infty, 0) \\ 0 & \text{falls } a \in [0, \infty] \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $\langle \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \min, +, ^*, \infty, 0\rangle$ eine Kleene Algebra ist.

(c) Zeigen Sie, dass in jeder Kleene Algebra $\langle K, +, \cdot, ^*, 0, 1\rangle$ für beliebige $a, b, c, d, e, f \in K$ gilt:

(i) $\sqsubseteq$ ist eine partielle Ordnung auf K, die monoton bzgl. Addition, Multiplikation und Stern ist, d.h.:

$$a \sqsubseteq b \to (ca \sqsubseteq cb \wedge ac \sqsubseteq bc \wedge a + c \sqsubseteq b + c \wedge a^* \sqsubseteq b^*)$$

(ii) a^*b ist die bzgl. $\sqsubseteq$ kleinste Lösung der linearen Ungleichung $b + aX \sqsubseteq X$ in K (X Variable), genauer:

$$b + a(a^*b) \sqsubseteq a^*b \qquad \wedge \qquad \forall x \in K\colon b + ax \sqsubseteq x \to a^*b \sqsubseteq x$$

Entsprechend ist ba^* die kleinste Lösung in K von $b + Xa \sqsubseteq X$.

Man kann zeigen, dass jedes lineare Ungleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \dots a_{1,n}X_n + b_1 & \sqsubseteq & X_1 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}X_1 + a_{n,2}X_2 + \dots a_{n,n}X_n + b_n & \sqsubseteq & X_n \end{array}$$

mit $a_{i,j}, b_i \in K$ und $X_1, \ldots, X_n$ Variablen stets eine eindeutige $\sqsubseteq$-kleinste Lösung in K hat, d.h. dass es konkrete Elemente $x_1, \ldots, x_n \in K$ gibt, so dass für $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ alle obigen Ungleichungen erfüllt sind, und für jede weitere Lösung $X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n \in K$ stets $x_i \sqsubseteq y_i$ gilt. Insbesondere gilt

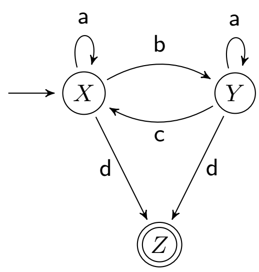
$$x_1 = a_{1,1}^*(a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + b_1)$$

Somit kann das Gauß-Verfahren zur Bestimmung von $x_1, \ldots, x_n$ verwendet werden.

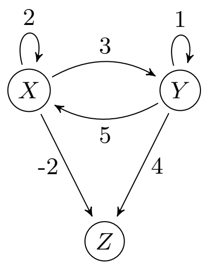
(d) Bestimmen Sie die kleinste Lösung x_1, x_2, x_3, x_4 für folgendes System:

$$\begin{aligned} aX + bY + eZ &\sqsubseteq X \\ cX + dY + fZ &\sqsubseteq Y \\ 1 &\sqsubseteq Z \end{aligned}$$

(e) Bestimmen Sie den regulären Ausdruck für den Zustand X. Durch welche Werte muss man a, b, c, d, e, f konkret ersetzen, damit sich die in (d) berechneten Terme in $\langle 2^{\Sigma^*}, \cup, \circ, ^*, \emptyset, \{\varepsilon\}\rangle$ zu dem gewünschten Ausdruck auswertet?



(f) Bestimmen Sie die Länge eines kürzesten Pfades von jedem Knoten zum Knoten Z in folgendem gewichteten Graphen. Durch welche Werte muss man a, b, c, d, e, f konkret ersetzen, damit sich die in (d) berechneten Terme in $\langle \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \min, +, \infty, 0\rangle$ zu den gesuchten Pfadlängen auswerten?



Lösungsskizze

(a) Nur Stern überprüfen, Rest sollte klar sein. $\sqsubseteq$ entspricht hier $\subseteq$.
$1 + aa^* \sqsubseteq a^*$ wird zu $\{\varepsilon\} \cup AA^* \subseteq A^*$ mit $A \subseteq \Sigma^*$, was man leicht nachrechnet:

$$\{\varepsilon\} \cup AA^* = \{\varepsilon\} \cup A \bigcup_{k\geq 0} A^k = A^0 \cup \bigcup_{k \geq 1} A^k = A^*$$

Entsprechend für $1 + a^*a \sqsubseteq a^*$.
$b + ax \sqsubseteq x \to a^*b \sqsubseteq x$ wird zu

$$B \cup AX \subseteq X \to A^*B \subseteq X$$

mit $A, B, X \subseteq \Sigma^*$.
Mittels Induktion zeigt man nun, dass $A^kB \subseteq X$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ unter Verwendung von $B \cup AX \subseteq X$:

- $k = 0$: $A^0B = \{\varepsilon\}B = B \subseteq B \cup AX \subseteq X$.
- $k \to k+1$: Für $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert gelte $A^kB \subseteq X$. Damit:

$$A^{k+1}B = A(A^kB) \subseteq AX \subseteq B \cup AX \subseteq X$$

Damit:

$$A^*B = \bigcup_{k\geq 0} A^kB \subseteq \bigcup_{k\geq 0} X = X$$

was zu zeigen war.

(b) Zur Verdeutlichung, welche Addition gemeint ist: $+_{\mathbb{R}}$ bezeichnet die übliche Addition auf den reellen Zahlen (erweitert auf $\pm\infty$).

Beachten: $\sqsubseteq$ auf K entspricht hier $\geq$ auf den reellen Zahlen

$$a \sqsubseteq b \text{ gdw. } \min(a,b) = b \text{ gdw. } a \geq b$$

$1 + aa^* \sqsubseteq a^*$ wird zu $\min(0, a +_{\mathbb{R}} a^*) \geq a^*$:
Gilt $a \geq 0$, so folgt $a^* = 0$ und damit $\min(0, a +_{\mathbb{R}} a^*) = 0 = a^*$; gilt $a < 0$, so folgt $a^* = -\infty$ und damit $\min(0, a +_{\mathbb{R}} a^*) = -\infty = a^*$. Für $1 +_{\mathbb{R}} a^*a \sqsubseteq a$ symmetrisch.
Aus $b + ax \sqsubseteq x \to a^*b \sqsubseteq x$ wird $\min(b, a +_{\mathbb{R}} x) \geq x \to a^* +_{\mathbb{R}} b \geq x$:
Aus $\min(b, a +_{\mathbb{R}} x) \geq x$ folgt $b \geq x \wedge a +_{\mathbb{R}} x \geq x$, damit $a \geq 0$ und somit auch $a^* = 0$, womit $a^* +_{\mathbb{R}} b \geq x$ stets gilt.

(c) (i) Reflexivität folgt aus der Definition von $\sqsubseteq$ und der Idempotenz von $+$:

$$a \sqsubseteq a \overset{\text{nDef}}{\longleftrightarrow} a + a = a$$

Antisymmetrie folgt aus der Definition von $\sqsubseteq$ und der Kommutativität von $+$:

$$b \overset{a \sqsubseteq b}{=} a + b = b + a \overset{b \sqsubseteq a}{=} a$$

Transitivität folgt aus der Definition von $\sqsubseteq$ und der Assoziativität von $+$:

$$c \overset{b \sqsubseteq c}{=} c + b \overset{a \sqsubseteq b}{=} c + (b + a) = (c + b) + a \overset{b \sqsubseteq c}{=} c + a$$

Es gelte $a \sqsubseteq b$. Monotonie von $+$:

$$c + b \overset{a \sqsubseteq b}{=} c + (b + a) = (c + a) + b \overset{\text{Def } \sqsubseteq}{\sqsupseteq} c + a$$

Entsprechend Monotonie von $\cdot$:

$$cb \overset{a \sqsubseteq b}{=} c(b + a) = cb + ca \overset{\text{Def } \sqsubseteq}{\sqsupseteq} ca$$

Bleibt die Monotonie von *: mit Ax5 und der Monotonie von $\cdot$

$$b^* \sqsupseteq 1 + bb^* \sqsupseteq 1 + ab^*$$

womit sofort aus Ax6 $a^* \sqsubseteq b^*$ folgt (in Ax6 1 für b und b^* für x substituieren).

(ii) Wir zeigen zuerst den Speziallfall mit $b = 1$:
$1 + aa^* \sqsubseteq a^*$ ist Ax5. Bleibt $a^* \sqsubseteq 1 + aa^*$.
Nach Ax6 $b + ax \leq x \to a^*b \leq x$ mit 1 substituiert für b und $1 + aa^*$ substituiert für x reicht es zu zeigen, dass

$$1 + a(\underbrace{1 + aa^*}_{\sqsubseteq a^* (\text{Ax5})}) \sqsubseteq 1 + aa^*$$

was aber wegen Ax5 ($1 + aa^* \sqsubseteq a^*$) und der Monotonie von $\sqsubseteq$ gilt.
Symmetrisch folgt $1 + a^*a = a^*$.
Damit folgt auch sofort $b + a(a^*b) = (1 + aa^*)b = a^*b$ und symmetrisch $b + (ba^*)a = ba^*$.
Somit hat $b + aX \sqsubseteq X$ mit $X = a^*b$ mindestens eine Lösung, für – wie gerade gezeigt – die sogar Gleichheit gilt, nach Ax6 ist jede weitere Lösung größer als a^*b. Symmetrisch für $b + Xa \sqsubseteq X$ und $X = ba^*$.

(d) $1 \sqsubseteq Z$ führt auf $Z = 1$.
Damit ergibt sich $Y = d^*(cX + f)$ aus

$$cX + dY + fZ \sqsubseteq Y$$

Und damit $X = (a + bd^*c)^*(e + bd^*f)$ aus

$$aX + bY + eZ \sqsubseteq X$$

Damit schließlich $Y = d^*c(a + bd^*c)^*(e + bd^*f) + d^*f$.
Bemerkung: Man kann natürlich auch zuerst nach X und dann nach Y lösen, was auf

$$X = a^*(bY + e)$$

und damit auf

$$Y = (d + ca^*b)^*(f + ca^*e) \qquad X = a^*b(d + ca^*b)^*(f + ca^*e) + a^*e$$

führt.
Da die erhaltenen Terme jeweils die eindeutige kleinste Lösung beschreiben müssen, folgt z.B.

$$Y = (d + ca^*b)^*(f + ca^*e) = d^*c(a + bd^*c)^*(e + bd^*f) + d^*f$$

(e) Stellt man das LGS nach VL für den NFA auf, so erhält man genau das System aus (d) – mit der einzigen Aussnahme, dass statt der abstrakten Operationen die konkreten Operationen für Sprachen verwendet werden. Die Lösungsschritte aus (d) können somit auch im konkreten Fall angewendet werden. Insbesondere beschreiben die Terme aus (d) bzw. die entsprechenden regulären Ausdrücke gerade alle Pfade von X bzw. Y nach Z (siehe auch Folien).
Beispiel: aus

$$d^*c(a + bd^*c)^*(bd^*f + e) + d^*f$$

wird mit den Werten $a = \mathsf{a}, b = \mathsf{b}, c = \mathsf{c}, d = \mathsf{a}, e = f = \mathsf{d}$

$$L(\mathsf{a}^*\mathsf{c}(\mathsf{a} \mid \mathsf{ba}^*\mathsf{c})^*(\mathsf{ba}^*\mathsf{d} \mid \mathsf{d})|\mathsf{a}^*\mathsf{d})$$

(f) Von X nach Z geht man direkt: -2
Von Y nach Z geht man über X: $5 - 2 = 3$
Von Z nach Z: 0
Setzt man $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 1$, $e = -2$ und $f = 4$, so werten sich die Ausdrücke aus (d) mit min als Addition und $+$ als Multiplikation gerade zu diesen Werten aus.
Beispiel: Aus

$$d^*c(a + bd^*c)^*(bd^*f + e) + d^*f$$

wird

$$\min(1^* + 5 + (\min(2, 3 + 1^* + 5))^* + \min(3 + 1^* + 4, -2), 1^* + 4) = \min(0 + 5 + 0 - 2, 0 + 4) = 3$$