Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt Lösungsskizze 1

Ablauf Hausaufgabenabgabe

Achtung: Lesen Sie upgedateten (24.04.2020) Modalitäten auf der Vorlesungswebsite zur Hausaufgabenabgabe. Sie können nach Teammitgliedern über den markierten Post in Piazza suchen.

AUFGABE 1.1. (*DFA/NFA Konstruktion*) 0,5 + 0,5 + 0,5 Punkte

Lösen Sie im AutomataTutor die Aufgaben H1.1 (a–c). Beachten Sie, dass im Gegensatz zu den Übungsaufgaben für jede Teilaufgabe **maximal fünf Versuche** erlaubt sind und dass nur vollständig richtige Lösungen (10/10 in AT) einen Hausaufgabenpunkt bekommen.
Die Lösungen müssen Sie nicht in ihre handschriftliche Abgabe mit aufnehmen, es reicht aus sie in AT einzureichen. Diese Aufgabe ist **einzeln** zu bearbeiten, die restlichen Aufgaben in Zweiergruppen.

AUFGABE 1.2. (*Die Abgabe der Hausaufgabe erfolgt in Paaren, nicht Familien*) 0,5+1+0,5 P. + 1 Bonus

Mit (x, y) bezeichnen wir ein Paar von Objekten x, y. Dabei gilt folgendes:

- $(x, y) = (x', y')$ genau dann wenn $x = x'$ und $y = y'$.
- $x \neq (x, y)$ und $y \neq (x, y)$.

Wir nennen eine Menge A *abgeschlossen unter Paarbildung*, falls folgende Bedingung (P) gilt:

$$\forall x, y \in A.\ (x, y) \in A \tag{P}$$

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine Familie von Mengen (d.h. Menge von Mengen), die abgeschlossen unter Paarbildung sind. Zeigen oder widerlegen Sie: Der Schnitt aller Mengen aus $\mathcal{A}$, d.h. $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, ist abgeschlossen unter Paarbildung.

(b) Sei A eine Menge. Wir definieren:

  (i) $A_0 := A$
  (ii) $A_{n+1} := A_n \cup (A_n \times A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  (iii) $A_\times := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

  Erinnerung: Das kartesische Produkt von Mengen A, B ist definiert als $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$.

  Zeigen Sie: $A_\times$ ist die unter Mengeninklusion kleinste unter Paarbildung abgeschlossene Menge, die A enthält.
  Bemerkung: Man nennt $A_\times$ die *unter Paarbildung abgeschlossene Hülle* von A.

(c) Es gibt eine weitere Möglichkeit zur Generierung der Hülle einer Menge unter Paarbildung. Zeigen Sie:

$$A'_\times := \bigcap_{M \supseteq A,\ M \text{ erüllt (P)}} M = A_\times$$

(d) (Bonusaufgabe) Das Ziel der Aufgabe 1.2 ist es eigentlich, der Konkatenation von Wörtern eine mengentheoretische Semantik zuzuweisen, um somit ein für alle mal eine Frage auf Piazza zu klären. Wir werden dazu die Hülle unter Paarbildung $\Sigma_\times$ eines Alphabetes Σ verwenden. Um Paare nun mit Wörtern zu identifizieren, schreiten wir wie folgt voran:

  Sei A eine nichtleere Menge. Sei π die kleinste Äquivalenzrelation über $A_\times$, sodass für alle $x, y, z \in A_\times$ gilt:

$$x \equiv_\pi x' \wedge y \equiv_\pi y' \implies (x, y) \equiv_\pi (x', y') \tag{1}$$
$$(x, (y, z)) \equiv_\pi ((x, y), z) \tag{2}$$

  Wir definieren $S^\otimes := \{[x]_\pi \mid x \in S_\times\}$, wobei $[x]_\pi$ die Äquivalenzklasse von x bezüglich π ist. Außerdem definieren wir eine Operation $[x]_\pi \otimes [y]_\pi := [(x, y)]_\pi$ für alle $x, y \in S_\times$. Die Algebra $(S^\otimes, \otimes)$ ist dann eine Halbgruppe (das müssen Sie nicht beweisen). Zur Erinnerung: Eine Halbgruppe $(S, *)$ besteht aus einer Menge S und assoziativen Funktion $* : S \times S \to S$.

  Sei nun $\Sigma \neq \emptyset$ ein Alphabet und sei $\circ$ der Wortkonkatenationsoperator, d.h. $u \circ v := uv$. Zeigen Sie: Die Halbgruppe $(\Sigma^\otimes, \otimes)$ ist isomorph zur Halbgruppe $(\Sigma^+, \circ)$. Geben Sie hierfür einen bijektiven Homomorphismus zwischen den Halbgruppen an.

  Bemerkung: Wir haben somit der Konkatenation (ohne dem leeren Wort) und transitiven Hüllenbildung eine mengentheoretische Semantik zugewiesen.

(e) (Knobelaufgabe, Keine Korrektur) Wie können Sie vorherige Konstruktionen erweitern, um auch das leere Wort ε und somit die reflexive, transitive Hülle Σ^* abbilden zu können?

Lösungsskizze

(a) Die Aussage ist wahr.

Beweis. Sei $x, y \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. Dann gilt $x, y \in A$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Da jedes $A \in \mathcal{A}$ Bedingung (P) erfüllt, gilt $(x, y) \in A$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Somit folgt $(x, y) \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. □

(b) Die Aussage ist wahr. Wir müssen folgende drei Bedingungen zeigen:

(i) $A \subseteq A_\times$
(ii) $A_\times$ erfüllt (P)
(iii) Für jede Menge $M \supseteq A$, die (P) erfüllt, gilt $A_\times \subseteq M$.

Beweis. (i) $A \stackrel{\text{Def.}}{=} A_0 \subseteq A_0 \cup \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \stackrel{\text{Def.}}{=} A_\times$

(ii) Wir zeigen zunächst $A_i \subseteq A_j$ für alle $i < j \in \mathbb{N}$ per Induktion über j. Der Fall $j = 0$ gilt trivialerweise. Im Fall $j + 1$ gilt $A_{j+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} A_j \cup (A_j \times A_j) \stackrel{\text{IH}}{\supseteq} A_i \cup (A_j \times A_j) \supseteq A_i$.
Sei nun $x, y \in A_\times$. Dann gibt es A_i, A_j mit $x \in A_i$ und $y \in A_j$. Setze $m \coloneqq \max\{i, j\}$. Nach vorherigem gilt $x, y \in A_m$. Somit folgt $A_{m+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} A_m \cup (A_m \times A_m) \supseteq A_m \times A_m \ni (x, y)$.

(iii) Sei $M \supseteq A$ eine beliebige Menge abgeschlossen unter Paarbildung. Da $A_\times \stackrel{\text{Def.}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, reicht es $A_n \subseteq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Wir zeigen dies per Induktion über n.
Im Fall $n = 0$ gilt $A_0 \stackrel{\text{Def.}}{=} A \stackrel{\text{Ann.}}{\subseteq} M$. Im Fall $n + 1$ sei $p \in A_{n+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} A_n \cup (A_n \times A_n)$ beliebig. Falls $p \in A_n$, folgt $p \in M$ per Induktionshypothese. Falls $p \in A_n \times A_n$, gibt es $x, y \in A_n$ mit $p = (x, y)$. Somit $x, y \in M$ per Induktionshypothese und somit $p = (x, y) \in M$ da M abgeschlossen unter Paarbildung ist. □

(c) *Beweis.* Zunächst sehen wir, dass $A \subseteq A'_\times$. Aus Teilaufgabe (a) folgt die Abgeschlossenheit von $A'_\times$ unter Paarbildung. Aus Teilaufgabe (b) folgt somit $A_\times \subseteq A'_\times$. Aus Teilaufgabe (b) folgt weiters $A \subseteq A_\times$, und dass $A_\times$ Bedingung (P) erfüllt. Somit $A'_\times \subseteq A_\times$ und damit $A_\times = A'_\times$. □

(d) *Beweis.* Mit $w_i \in \Sigma$ bezeichnen wir den i-ten Buchstaben eines Wortes $w \in \Sigma^+$. Wir definieren

$$h : \Sigma^+ \to \Sigma^\otimes, w_1 \cdots w_n \mapsto [((\cdots((w_1, w_2), w_3), \cdots), w_n)]_\pi,$$

wobei $(x) \coloneqq x$ für $x \in \Sigma$. Sei nun $u = u_1 \cdots u_n, v = v_1 \cdots v_m \in \Sigma^+$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
h(uv) &\stackrel{\text{Def. h}}{=} [(\cdots(u_1, u_2), \cdots), u_n), v_1), \cdots), v_m)]_\pi \\
&\stackrel{\text{Def. }\otimes}{=} \big(\cdots([u_1]_\pi \otimes [u_2]_\pi) \otimes \cdots) \otimes [u_n]_\pi) \otimes [v_1]_\pi \otimes \cdots) \otimes [v_m]_\pi\big) \\
&\stackrel{\otimes\text{ assoz.}}{=} \big(\cdots([u_1]_\pi \otimes [u_2]_\pi) \otimes \cdots) \otimes [u_n]_\pi\big) \otimes \big(\cdots([v_1]_\pi \otimes [v_2]_\pi) \otimes \cdots) \otimes [v_m]_\pi\big) \\
&\stackrel{\text{Def. }\otimes}{=} [(\cdots(u_1, u_2), \cdots), u_n)]_\pi \otimes [(\cdots(v_1, v_2), \cdots), v_m)]_\pi \\
&\stackrel{\text{Def. h}}{=} h(u) \otimes h(v)
\end{aligned}$$

Somit ist h ein Homomorphismus. Um die Injektivität zu zeigen, gelte nun $h(u) = h(v)$. Dann folgt

$$[(\cdots(u_1, u_2), \cdots), u_n)]_\pi = [(\cdots(v_1, v_2), \cdots), v_m)]_\pi.$$

Somit folgt $n = m$. Induktiv ergibt sich $u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n$, also $u = v$ und damit ist h injektiv. Für die Surjektivität sei $[w]_\pi \in \Sigma^\otimes$ beliebig. Aufgrund der Assoziativität von $\otimes$ wissen wir $[w]_\pi = [(\cdots(w_1, w_2), \cdots), w_n)]_\pi$. Wir schreiten per Induktion über die Länge n von w voran. Im Fall $n = 1$ gilt $h(w_1) = [w_1]_\pi$. Im Fall $n + 1$ gilt

$$[w]_\pi = [(\cdots(w_1, w_2), \cdots), w_{n+1})]_\pi = [(\cdots(w_1, w_2), \cdots), w_n)]_\pi \otimes [w_{n+1}]_\pi$$

Nach Induktionshypothese gibt es $u \in \Sigma^+$ mit $h(u) = [(\cdots(w_1, w_2), \cdots), w_n)]_\pi$. Nun gilt $uw_{n+1} \in \Sigma^+$ und außerdem folgt $[w]_\pi = h(u) \otimes h(w_{n+1}) \stackrel{\text{h hom.}}{=} h(uw_{n+1})$. Damit ist h surjektiv, also insgesamt bijektiv und damit ein Halbgruppen-Isomorphismus. □

AUFGABE 1.3. (*Weniger ist nicht immer mehr*) 0,5 + 1 Punkte

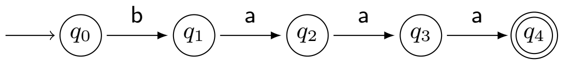
Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ und $\mathsf{W} = \{\mathsf{ba}^n\}$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Sei $n = 3$. Zeichnen Sie einen NFA, der W erkennt.

(b) Beweisen sie, dass jeder NFA, der die Sprache W erkennt, mindestens $n+2$ Zustände hat.

Lösungsskizze

(a) Skizze:



(b) *Beweis.* Annahme zum Widerspruch: Es gibt einen Automaten $\mathsf{N} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \delta, q_0, \mathsf{F})$ mit weniger als $n+2$ Zuständen, der W akzeptiert. Da N das Wort $w = \mathsf{ba}^n$ akzeptiert und $|\mathsf{ba}^n| = n+1$, muss es einen akzeptierenden Lauf $L = s_0 \xrightarrow{b} s_1 \xrightarrow{a} \cdots \xrightarrow{a} s_{n+1} \in \mathsf{F}$ geben wobei $s_0 = q_0$. Es gibt aber höchstens $n+1$ Zustände, daher folgt nach Schubfachprinzip, dass mindestens ein Zustand s_i durch den Lauf zweimal besucht wird. Dadurch gibt es einen Kreis $s_i \xrightarrow{w_i} s_{i+1} \xrightarrow{w_{i+1}}_{\mathsf{D}} \cdots \xrightarrow{w_{j-1}} s_j$ in L, wobei $s_i = s_j$. Wenn wir den Kreis abkürzen, d.h. den Lauf $s_0 \xrightarrow{w_0} \cdots \xrightarrow{w_{i-1}} s_i \xrightarrow{w_j} s_{j+1} \xrightarrow{w_{j+1}} \cdots \xrightarrow{w_n} q_{n+1} \in F$ betrachten, dann ist dies auch ein akzeptierender Lauf. Deshalb akzeptiert N ein Wort w' mit $|w'| < n+1$, was ein Widerspruch zur Annahme ist, dass N die Sprache W akzeptiert. $\square$

Do you train for passing tests or do you train for creative inquiry?

— Noam Chomsky in The Purpose of Education

Noam Chomsky (Source: Wikipedia)