Prof. T. Nipkow
K. Kappelmann, J. Rädle, L. Stevens **ABGABE 04.05.2020, 23:59 (Σ 5 P.)** Technische Universität München
Lehrstuhl für Logik und Verifikation

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt 1

Ablauf Hausaufgabenabgabe

Achtung: Lesen Sie upgedateten (24.04.2020) Modalitäten auf der Vorlesungswebsite zur Hausaufgabenabgabe. Sie können nach Teammitgliedern über den markierten Post in Piazza suchen.

AUFGABE 1.1. (*DFA/NFA Konstruktion*) 0,5 + 0,5 + 0,5 Punkte

Lösen Sie im AutomataTutor die Aufgaben H1.1 (a–c). Beachten Sie, dass im Gegensatz zu den Übungsaufgaben für jede Teilaufgabe **maximal fünf Versuche** erlaubt sind und dass nur vollständig richtige Lösungen (10/10 in AT) einen Hausaufgabenpunkt bekommen.
Die Lösungen müssen Sie nicht in ihre handschriftliche Abgabe mit aufnehmen, es reicht aus sie in AT einzureichen. Diese Aufgabe ist **einzeln** zu bearbeiten, die restlichen Aufgaben in Zweiergruppen.

AUFGABE 1.2. (*Die Abgabe der Hausaufgabe erfolgt in Paaren, nicht Familien*) 0,5+1+0,5 P. + 1 Bonus

Mit (x, y) bezeichnen wir ein Paar von Objekten x, y. Dabei gilt folgendes:

- $(x, y) = (x', y')$ genau dann wenn $x = x'$ und $y = y'$.
- $x \neq (x, y)$ und $y \neq (x, y)$.

Wir nennen eine Menge A *abgeschlossen unter Paarbildung*, falls folgende Bedingung (P) gilt:

$$\forall x, y \in A.\ (x, y) \in A \tag{P}$$

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine Familie von Mengen (d.h. Menge von Mengen), die abgeschlossen unter Paarbildung sind. Zeigen oder widerlegen Sie: Der Schnitt aller Mengen aus $\mathcal{A}$, d.h. $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$, ist abgeschlossen unter Paarbildung.

(b) Sei A eine Menge. Wir definieren:

(i) $A_0 := A$
(ii) $A_{n+1} := A_n \cup (A_n \times A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
(iii) $A_\times := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Erinnerung: Das kartesische Produkt von Mengen A, B ist definiert als $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$.

Zeigen Sie: $A_\times$ ist die unter Mengeninklusion kleinste unter Paarbildung abgeschlossene Menge, die A enthält.
Bemerkung: Man nennt $A_\times$ die *unter Paarbildung abgeschlossene Hülle* von A.

(c) Es gibt eine weitere Möglichkeit zur Generierung der Hülle einer Menge unter Paarbildung. Zeigen Sie:

$$A'_\times := \bigcap_{M\supseteq A,\ M \text{ erüllt (P)}} M = A_\times$$

(d) (Bonusaufgabe) Das Ziel der Aufgabe 1.2 ist es eigentlich, der Konkatenation von Wörtern eine mengentheoretische Semantik zuzuweisen, um somit ein für alle mal eine Frage auf Piazza zu klären. Wir werden dazu die Hülle unter Paarbildung $\Sigma_\times$ eines Alphabetes Σ verwenden. Um Paare nun mit Wörtern zu identifizieren, schreiten wir wie folgt voran:

Sei A eine nichtleere Menge. Sei π die kleinste Äquivalenzrelation über $A_\times$, sodass für alle $x, y, z \in A_\times$ gilt:

$$x \equiv_\pi x' \wedge y \equiv_\pi y' \implies (x, y) \equiv_\pi (x', y') \tag{1}$$
$$(x, (y, z)) \equiv_\pi ((x, y), z) \tag{2}$$

Wir definieren $S^\otimes := \{[x]_\pi \mid x \in S_\times\}$, wobei $[x]_\pi$ die Äquivalenklasse von x bezüglich π ist. Außerdem definieren wir eine Operation $[x]_\pi \otimes [y]_\pi := [(x, y)]_\pi$ für alle $x, y \in S_\times$. Die Algebra $(S^\otimes, \otimes)$ ist dann eine Halbgruppe (das müssen Sie nicht beweisen). Zur Erinnerung: Eine Halbgruppe $(S, *)$ besteht aus einer Menge S und assoziativen Funktion $* : S \times S \to S$.

Sei nun $\Sigma \neq \emptyset$ ein Alphabet und sei $\circ$ der Wortkonkatenationsoperator, d.h. $u \circ v := uv$. Zeigen Sie: Die Halbgruppe $(\Sigma^\otimes, \otimes)$ ist isomorph zur Halbgruppe $(\Sigma^+, \circ)$. Geben Sie hierfür einen bijektiven Homomorphismus zwischen den Halbgruppen an.

Bemerkung: Wir haben somit der Konkatenation (ohne dem leeren Wort) und transitiven Hüllenbildung eine mengentheoretische Semantik zugewiesen.

(e) (Knobelaufgabe, Keine Korrektur) Wie können Sie vorherige Konstruktionen erweitern, um auch das leere Wort ε und somit die reflexive, transitive Hülle Σ^* abbilden zu können?

AUFGABE 1.3. (*Weniger ist nicht immer mehr*) 0,5 + 1 Punkte

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ und $\mathsf{W} = \{\mathsf{ba}^n\}$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Sei $n = 3$. Zeichnen Sie einen NFA, der W erkennt.

(b) Beweisen sie, dass jeder NFA, der die Sprache W erkennt, mindestens $n + 2$ Zustände hat.

> Do you train for passing tests or do you train for creative inquiry?
>
> — Noam Chomsky in The Purpose of Education

Noam Chomsky (Source: Wikipedia)