Prof. T. Nipkow
K. Kappelmann, J. Rädle, L. Stevens

KEINE ABGABE

Technische Universität München
Lehrstuhl für Logik und Verifikation

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt Lösungsskizze 1

Ablauf der Tutorien

Die Tutoraufgaben werden *nicht* während den Tutorübungen gelöst. Bereiten Sie soweit wie möglich die Tutoraufgaben vor der Tutorübung vor und testen Sie ihre Kamera, Mikro und Möglichkeiten von BigBlueButton vor der ersten Tutorübung. Lesen Sie die Modalitäten auf der Vorlesungswebsite für mehr Informationen zur Tutorübung. Ihr*e Tutor*in wird Ihnen bekannt geben, wie Sie Fragen und Wünsche zur Tutorübung einbringen können.

AUFGABE 1.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Alphabet Σ
- Wort w
- Länge eines Wortes
- leeres Wort
- Konkatenation von Wörtern
- Σ^+, Σ^*
- formale Sprache
- Operationen auf Sprachen (Def. 2.3)
- reflexive transitive Hülle
- Wortproblem
- DFA
- NFA
- akzeptierte Sprache
- Zustandsgraph
- Akeptanzbedingung von DFAs/NFAs

AUFGABE 1.2. (*Automata Tutor*) Stufe B

AutomataTutor ist ein online Übungstool, mit dem Studierende die Grundlagen der Automatentheorie erlernen können. Es bietet die Möglichkeit, viele der für die Vorlesung relevanten Probleme selbständig zu üben.
In dieser Aufgabe geht es darum, dass Sie das Übungstool AutomataTutor kennenlernen. In den kommenden Wochen werden Sie über das Tool auch Hausaufgabenpunkte sammeln können.

- Rufen Sie die AutomataTutor Version der TUM auf. (https://automata.model.in.tum.de/)
- Loggen Sie sich mit Ihrer TUM-kennung (ab12cde) ein.
- Lösen Sie die Aufgaben unter ‘English to NFA” und “English to DFA”, diese entsprechen der Aufgabe 1.6.

AUFGABE 1.3. Stufe B

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ und $\mathsf{W} = \{\mathsf{aa}, \mathsf{aaa}, \mathsf{b}\}$. Geben Sie, wenn möglich, jeweils mindestens drei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

(a) $A = \{w \in W^* \mid |w| = 3\}$
(b) $B = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. \exists v \in W. w = uv\}$
(c) $C = \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0. |w|_{\mathsf{a}} = n \cdot |w|_{\mathsf{b}}\}$
(d) $D = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. uw = w^2u\}$
(e) $E = \{(\mathsf{ba}^n\mathsf{b})^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
(f) $F = \{w \mid w \in W^2 \wedge w \in W^3\}$

Hinweise:

- Mit $|w|_{\mathsf{a}}$ bezeichnen wir die Anzahl der as in w.

Lösungsskizze

(a) $\mathsf{aaa}, \mathsf{aab}, \mathsf{bbb} \in A$, $\mathsf{a}, \mathsf{bb}, \mathsf{aaab} \in \Sigma^* \setminus A$
(b) $\mathsf{aa}, \mathsf{bbaa}, \mathsf{bab} \in B$, $\mathsf{ba}, \mathsf{aba}, \mathsf{bba} \in \Sigma^* \setminus B$
(c) $\varepsilon, b, aaaabb \in C$, $a, aa, aaabb \in \Sigma^* \setminus C$
(d) $D = \{\varepsilon\}$, $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{aa} \in \Sigma^* \setminus D$
(e) $\varepsilon, \mathsf{bab}, \mathsf{baabbaab} \in E$, $\mathsf{bb}, \mathsf{baab}, \mathsf{abba} \in \Sigma^* \setminus E$
(f) $F = \{\mathsf{a}^6\}$, $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{aaa} \in \Sigma^* \setminus F$

AUFGABE 1.4. Stufe B

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$, $\mathsf{A} = \{\varepsilon, \mathsf{a}, \mathsf{ab}\}$ und $\mathsf{B} = \{\mathsf{a}, \mathsf{ba}\}$. Wir betrachten nun verschiedene Verknüpfungen. Geben Sie für endliche Mengen alle Elemente und für unendliche drei Beispiele an:

(a) AB
(b) A^2
(c) B^0
(d) $\mathsf{A}\emptyset$
(e) $\mathsf{A} \times (\emptyset^*)$
(f) $\mathsf{A}\Delta\mathsf{B} := (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \setminus (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$
(g) $\overline{B} := \Sigma^* \setminus B$

Lösungsskizze

(a) $\mathsf{AB} = \{a, \mathsf{ba}, \mathsf{aa}, \mathsf{aba}, \mathsf{abba}\}$
(b) $\mathsf{A}^2 = \{\varepsilon, \mathsf{a}, \mathsf{ab}, \mathsf{aa}, \mathsf{aab}, \mathsf{aba}, \mathsf{abab}\}$
(c) $\mathsf{B}^0 = \{\varepsilon\}$
(d) $\mathsf{A}\emptyset = \emptyset$
(e) $\mathsf{A}\times(\emptyset^*) = \{(\varepsilon,\varepsilon), (\mathsf{a},\varepsilon), (\mathsf{ab},\varepsilon)\}$
(f) $\mathsf{A}\Delta\mathsf{B} = \{\varepsilon, \mathsf{ab}, \mathsf{ba}\}$
(g) $\varepsilon, \mathsf{b}, \mathsf{ab} \in \overline{B}$

AUFGABE 1.5. (*Endlich... Beweise!*)

Stufe D

Sei Σ ein Alphabet und $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C} \subseteq \Sigma^*$ beliebig. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie für korrekte Aussagen einen Beweis an oder widerlegen Sie falsche mithilfe eines geeigneten Gegenbeispiels.

(a) $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^+$ genau dann wenn (gdw.) $\varepsilon \in \mathsf{A}$
(b) $\mathsf{A}(\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = \mathsf{AB} \cap \mathsf{AC}$
(c) Falls $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{B}$, dann $\mathsf{A}^n \subseteq \mathsf{B}^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.
(d) Unter der Annahme $\mathsf{A} \neq \emptyset$ gilt: $\mathsf{A} = \mathsf{AA}$ gdw. $\mathsf{A} = \mathsf{A}^*$.

Lösungsskizze

(a) Die Aussage ist wahr. Wir zeigen beide Richtungen der Aussage getrennt.

$\Longleftarrow$: Annahme $\varepsilon \in \mathsf{A}$. Per Definition (Def.) gilt

$$\mathsf{A}^* \overset{\text{Def.}}{=} \bigcup_{n\geq 0} \mathsf{A}^n = \mathsf{A}^0 \cup \bigcup_{n \geq 1} \mathsf{A}^n \overset{\text{Def.}}{=} \mathsf{A}^0 \cup \mathsf{A}^+ \overset{\text{Def.}}{=} \{\varepsilon\} \cup \mathsf{A}^+.$$

Es reicht also $\varepsilon \in \mathsf{A}^+$ zu zeigen. Nach Vorlesung (VL) wissen wir $\mathsf{A}^+ \overset{\text{VL}}{=} \mathsf{AA}^* \overset{\text{Def.}}{=} \{uv \mid u \in \mathsf{A} \text{ und } v \in \mathsf{A}^*\}$. Wir wissen $\varepsilon \in \mathsf{A}$ per Annahme und es gilt stets $\varepsilon \in \mathsf{A}^*$. Somit $\varepsilon \in \mathsf{AA}^* = \mathsf{A}^+$. ■

$\Longrightarrow$: Beweis per Kontraposition (Erinnerung: Eine Aussage $A \implies B$ ist äquivalent zu ihrer Kontraposition $\neg B \implies \neg A$). Annahme $\varepsilon \notin \mathsf{A}$. Zu zeigen $\mathsf{A}^* \neq \mathsf{A}^+$. Da $\varepsilon \in \mathsf{A}^*$, reicht es $\varepsilon \notin \mathsf{A}^+$ zu zeigen. Da $\mathsf{A}^+ = \bigcup_{n\geq 1} \mathsf{A}^n$ per Definition, reicht es $\varepsilon \notin \mathsf{A}^n$ für $n \geq 1$ zu zeigen. Der Fall $n = 1$ gilt per Annahme. Für den Fall $n > 1$ haben wir $\mathsf{A}^n \overset{\text{Def.}}{=} \mathsf{AA}^{n-1} \overset{\text{Def.}}{=} \{uv \mid u \in \mathsf{A} \text{ und } v \in \mathsf{A}^{n-1}\}$. Sei nun $w \in \mathsf{A}^n$. Dann gibt es $u \in A$ und $v \in \mathsf{A}^{n-1}$ mit $w = uv$. Da $\varepsilon \notin \mathsf{A}$ gilt $|u| > 0$, somit $|w| = |u| + |v| > 0 = |\varepsilon|$ und somit $w \neq \varepsilon$. □

(b) Die Aussage ist falsch. Wähle $\mathsf{A} = \{a, aa\}$, $\mathsf{B} = \{b\}$ und $\mathsf{C} = \{ab\}$. Dann gilt

$$\mathsf{A}(\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = \mathsf{A}\emptyset = \emptyset \neq \{aab\} = \{ab, aab\} \cap \{aab, aaab\} = \mathsf{AB} \cap \mathsf{AC}.$$

(c) Die Aussage ist wahr. Annahme (Ann.) $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{B}$. Wir zeigen die Aussage per Induktion über n. Für den Fall $n = 0$ gilt $\mathsf{A}^0 = \{\varepsilon\} = \mathsf{B}^0$. Im Fall $n + 1$ gilt $\mathsf{A}^n \subseteq \mathsf{B}^n$ per Induktionshypothese (IH). Wähle nun $w \in \mathsf{A}^{n+1} \overset{\text{Def.}}{=} \mathsf{AA}^n \overset{\text{Def.}}{=} \{uv \mid u \in \mathsf{A} \text{ und } v \in \mathsf{A}^n\}$. Das heißt es gibt $u \in \mathsf{A} \overset{\text{Ann.}}{\subseteq} \mathsf{B}$ und $v \in \mathsf{A}^n \overset{\text{IH}}{\subseteq} \mathsf{B}^n$ mit $w = uv$. Somit $w = uv \in \mathsf{BB}^n \overset{\text{Def.}}{=} \mathsf{B}^{n+1}$. □

(d) Die Aussage ist wahr. Annahme $\mathsf{A} \neq \emptyset$. Wir zeigen beide Richtungen der Aussage getrennt.

$\Longleftarrow$: Annahme $\mathsf{A} = \mathsf{A}^*$. Wir zeigen $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^*\mathsf{A}^*$. Da $\varepsilon \in \mathsf{A}^*$ gilt $\mathsf{A}^* = \{\varepsilon\}\mathsf{A}^* \subseteq \mathsf{A}^*\mathsf{A}^*$. Sei nun $w \in \mathsf{A}^*\mathsf{A}^*$. Dann existieren nach Definition $u, v \in \mathsf{A}^*$ mit $w = uv$. Weiterhin existieren $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n \in \mathsf{A}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ sodass $u = u_1 \cdots u_m$ und $v = v_1 \cdots v_n$. Somit $w = u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_n \in \mathsf{A}^{m+n} \subseteq \mathsf{A}^*$ und damit $\mathsf{A}^*\mathsf{A}^* \subseteq \mathsf{A}^*$. Insgesamt also $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^*\mathsf{A}^* \overset{\text{Ann.}}{=} \mathsf{AA}$. ■

$\Longrightarrow$: Annahme $\mathsf{A} = \mathsf{AA}$. Nach Definition gilt $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{A}^*$. Bleibt noch $\mathsf{A}^* \subseteq \mathsf{A}$ zu zeigen. Aufgrund der Definition von A^* reicht es $\mathsf{A}^n \subseteq \mathsf{A}$ für $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Wir zeigen die Aussage per Induktion über n.

Im Fall $n = 0$ gilt es $\mathsf{A}^0 \overset{\text{Def.}}{=} \{\varepsilon\} \subseteq \mathsf{A}$ zu zeigen. Sei hierfür $w \in \mathsf{A} = \mathsf{AA}$ ein kürzestes Wort. Dann lässt sich w in zwei Wörter $u, v \in \mathsf{A}$ mit $|w| = |u| + |v|$ faktorisieren. Da w ein kürzestes Wort ist, gilt $|w| \leq |u|$ und $|w| \leq |v|$. Somit $|w| = |u| = |v| = 0$, also $w = \varepsilon$.

Im Fall $n + 1$ folgt $\mathsf{A}^{n+1} \overset{\text{Def.}}{=} \mathsf{AA}^n \overset{\text{IH}}{\subseteq} \mathsf{AA} \overset{\text{Ann.}}{=} \mathsf{A}$. □

AUFGABE 1.6.

Stufe B

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ einen DFA (graphisch) an, der genau die jeweilige Sprache erkennt. Um direkt Feedback zu Ihrer Lösung zu bekommen, bearbeiten Sie die Aufgaben in AutomataTutor.

(a) Alle Wörter, die mit einem b beginnen.
(b) Alle Wörter gerader Länge.
(c) Alle Wörter ungerader Länge, die auf ein c enden.
(d) Die Sprache, die nur das leere Wort enthält.
(e) Alle Wörter, die aab enthalten.
(f) Alle Wörter, die eine durch drei teilbare Anzahl von c enthalten.
(g) $\mathsf{L} = \{\mathsf{aabcaa}, \mathsf{aacaa}, \mathsf{baa}\}$
(h) Alle Wörter, deren 3-letzter Buchstabe ein a ist, z.B. babb.

Geben Sie nun für jede der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ einen **NFA** an, der genau die jeweilige Sprache erkennt. Sie können diese Aufgaben ebenfalls in AutomataTutor bearbeiten.

(i) Alle Wörter, die aab enthalten.
(j) Alle Wörter, deren drittletzter Buchstabe ein a ist, z.B. babb. Der Automat sollte nicht mehr als 4 Zustände haben.

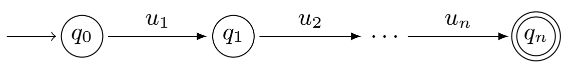
Beschreiben Sie dann in eigenen Worten, wie man im Allgemeinen einen Automaten konstruiert, der eine Sprache erkennt, die ...

(a) die nur Worte enthält, die eine bestimmte Sequenz von Buchstaben enthalten
(b) am Anfang/Ende jedes Wortes eine bestimmte Sequenz von Buchstaben fordert
(c) nur Worte gerader/ungerader Länge enthält
(d) von jedem Wort verlangt, eine bestimmte Anzahl an Buchstaben zu enthalten
(e) deren Worte an einer fixierten Position einen bestimmten Buchstaben haben müssen.

Lösungsskizze

Die Lösungenskizzen finden Sie unter https://www21.in.tum.de/teaching/theo/SS20/ex/theo20-01-lsg.zip.
Zu den letzten 5 allgemeineren Punkten:

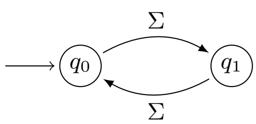
(a) Sei $u = u_1 \dots u_n$ ein Wort. Wir betrachten dann den folgenden NFA:



Dieser NFA akzeptiert die Sprache $\{u\}$. Wenn wir bei q_0 und q_n noch eine Schleife mit Σ hinzufügen, akzeptiert der NFA genau die Sprache aller Wörter, die u enthalten. Um daraus einen DFA zu bekommen muss man bei q_0 die Schleife mit dem Zeichen u_1 entfernen, und von den Zuständen q_i Rückwärtskanten für die Zeichen $\Sigma \setminus u_{i+1}$ einfügen. Das Ziel dieser Kanten muss immer das längste Präfix von u sein, das ein Suffix der bisher gelesenen Zeichenkette ist. Alternativ kann man den NFA natürlich mit der Potenzmengenkonstruktion determinisieren.

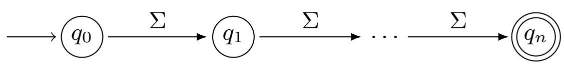
(b) Ähnlich wie a). Wenn u am Ende des Wortes vorkommen soll, dann macht man eine Schleife mit Σ an q_0, soll es am Anfang vorkommen gehört die Schleife an q_n.
Im letzteren Fall ist die Determinisierung leicht, man fügt von allen Zuständen q_i (außer q_n) eine Transition mit $\Sigma \setminus u_{i+1}$ in einen Fangzustand ein.
Soll u am Ende des Wortes vorkommen, müssen wir wie bei a) Rückwärtskanten einfügen.

(c)



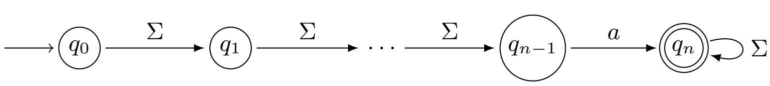
Wenn q_0 zu einem Endzustand gemacht wird, akzeptiert dieser DFA genau alle Wörter gerader Länge. Wird hingegen q_1 zum Endzustand gemacht, so akzeptiert er genau alle Wörter ungerader Länge.

(d) Ähnlich zu Aufgabe a). Der folgende NFA akzeptiert genau alle Wörter der Länge n:



Fügt man noch einen Fangzustand $\emptyset$ Σ hinzu und verbindet $q_n \xrightarrow{\Sigma} \emptyset$, so erhalten wir sogar einen DFA.

(e) Es geht um alle Wörter w, die an der Stelle n den Buchstaben a haben. Man kann den NFA aus dem ersten Teil von a) leicht anpassen:



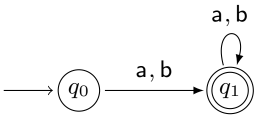
Auch hier erreicht man durch Hinzufügen eines Fangzustands wieder einen DFA.

AUFGABE 1.7. Stufe B

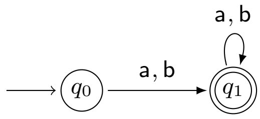
Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ und $\mathsf{B}_n \coloneqq \{w \in \Sigma^* \mid \exists i : w_i = w_{i+n}\}$ die Sprache aller Wörter über Σ, in denen an irgendeiner Stelle der selbe Buchstabe im Abstand n vorkommt. Insbesondere ist B_0 die Menge aller nicht leeren Wörter, und B_1 die Menge aller Wörter in denen ein Buchstabe zweimal hintereinander vorkommt. *Versuchen Sie in beiden Aufgabenteilen NFAs und DFAs mit möglichst wenigen Zuständen anzugeben.*

(a) Geben Sie jeweils einen NFA für B_0, B_1 und B_2 an.
(b) Geben Sie jeweils einen DFA für B_0, B_1 und B_2 an.
(c) Beschreiben Sie kurz, wie der DFA B_n und der NFA B_n für beliebige $n \in \mathbb{N}$ aussehen.
(d) Beurteilen Sie die folgende Aussage: *Es gibt einen NFA für B_n mit $O(n)$-vielen Zuständen, aber jeder DFA zu B_n hat mindestens $\Theta(2^n)$-viele Zustände.*

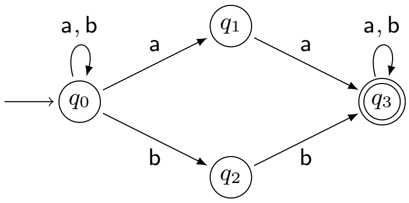
Lösungsskizze



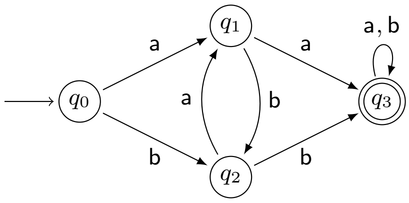
(a) NFA für B_0



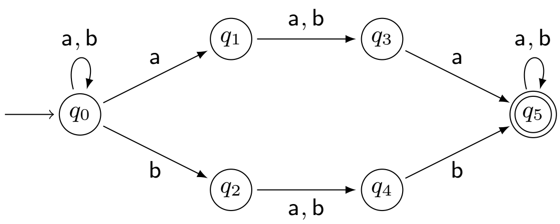
(b) DFA für B_0



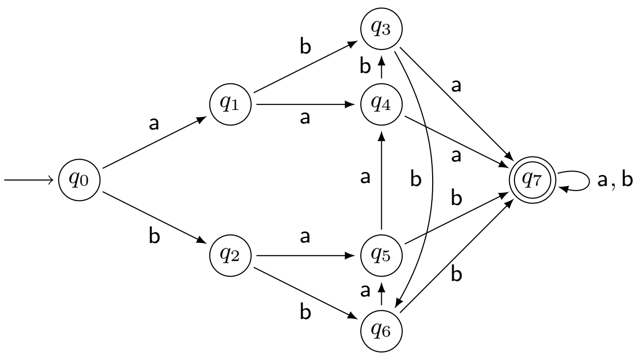
(c) NFA für B_1



(d) DFA für B_1



(e) NFA für B_2



(f) DFA für B_2

(c) Der NFA rät, ob jetzt das i-te Zeichen gelesen wird, welches die Bedingung erfüllt. Der DFA muss sich hingegen immer die letzten n Zeichen die er gelesen hat merken, um zu überprüfen, ob die Bedingung $w_i = w_{i+n}$ erfüllt ist.

(d) Die Aussage ist korrekt. Der Beweis ist ähnlich zu dem Beweis in den Vorlesungsfolien zur Sprache L_k. (Beispiel 3.9)