Prof. T. Nipkow
K. Kappelmann, J. Rädle, L. Stevens

KEINE ABGABE

Technische Universität München
Lehrstuhl für Logik und Verifikation

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt Lösungsskizze 3

AUFGABE 3.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Produktkonstruktion
- Pumping Lemma
- Wortproblem
- Leerheitsproblem
- Endlichkeitsproblem
- Äquivalenzproblem
- Ardenslemma
- Minimierung

AUFGABE 3.2. (*Automata Tutor*) Stufe B

Im AutomataTutor stehen wieder neue Aufgaben zur Verfügung. Die Aufgaben finden Sie unter den Kategorie "Pumping Lemma Game". Viel Spaß beim Spielen.

AUFGABE 3.3. Stufe B

Wie können Sie für einen

(a) DFA (b) NFA (c) Regulären Ausdruck

feststellen, ob die von ihm akzeptierte Sprache

(1) endlich ist? (2) leer ist? (3) ein Wort w enthält?

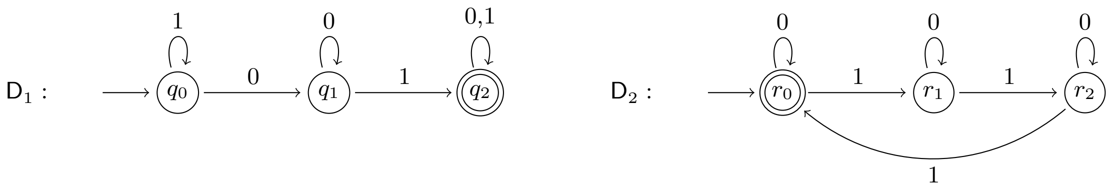
(d) Wie können Sie für zwei DFAs feststellen, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren?

Lösungsskizze

Siehe Vorlesung Folien 87ff. Reguläre Ausdrücke kann man in ε-NFAs überführen und dann die Verfahren aus der Vorlesung anwenden, oder aber rekursive Prozeduren angeben.

AUFGABE 3.4. Stufe C

Gegeben seien zwei DFAs D_1 und D_2 über dem gleichen Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.



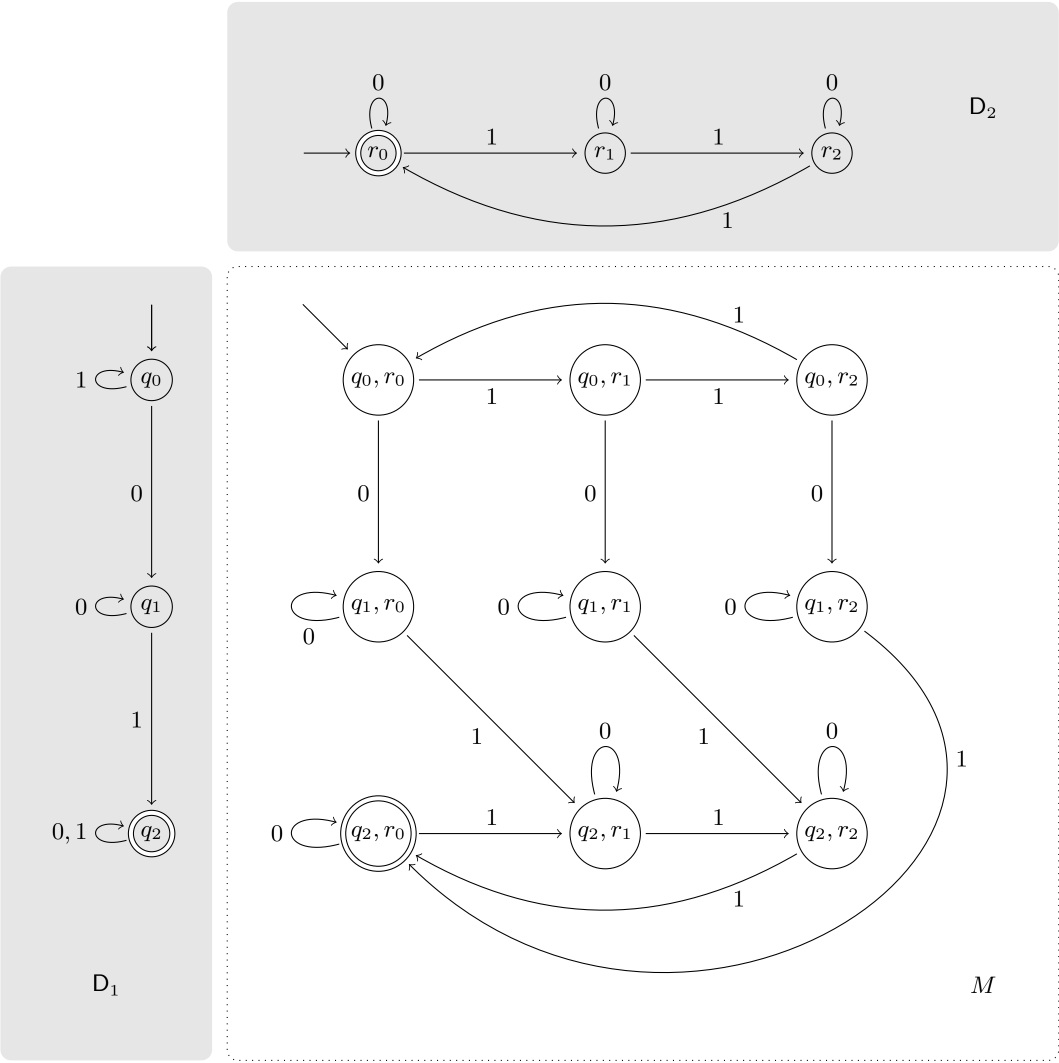
(a) Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung um einen DFA $\mathsf{D}_\cap$ anzugeben, sodass $\mathsf{L}(\mathsf{D}_\cap) = \mathsf{L}(\mathsf{D}_1) \cap \mathsf{L}(\mathsf{D}_2)$.

(b) Geben Sie einen DFA $\mathsf{D}_\cup$ an, sodass $\mathsf{L}(\mathsf{D}_\cup) = \mathsf{L}(\mathsf{D}_1) \cup \mathsf{L}(\mathsf{D}_2)$. Sie dürfen Ergebnisse aus Teilaufgabe a) verwenden.

(c) Was müssen Sie ändern, um einen DFA für $\mathsf{L}(\mathsf{D}_1) \setminus \mathsf{L}(\mathsf{D}_2)$ anzugeben? Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnisse für allgemeine binäre Operationen auf Sprachen.

Lösungsskizze

(a) Wir konstruieren den Schnittautomaten aus D_1 und D_2 durch Ausnutzen der Tabellennotation:



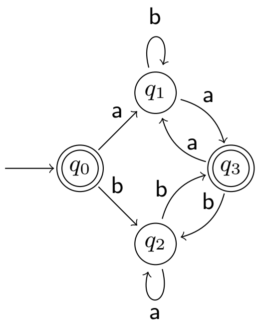
(b) Der Unterschied liegt nur in den Endzuständen.
Die Endzustände von $\mathsf{D}_\cup$ sind $\{(q_0, r_0), (q_1, r_0), (q_2, r_0), (q_2, r_1), (q_2, r_2)\}$

(c) Wieder nur die Endzustände ändern, nämlich auf $\{(q_2, r_1), (q_2, r_2)\}$.
Sei $\circ$ eine binäre Operation auf Sprachen, die folgendermaßen definiert ist: $\mathsf{L}_1 \circ \mathsf{L}_2 = \{w \mid w \in \mathsf{L}_1 \odot w \in \mathsf{L}_2\}$, wobei $\odot$ ein binärer boolscher Operator ist (z.B. bei Vereinigung, also $\circ = \cup$, gilt $\odot = \vee$).
Gegeben zwei Automaten D_1 und D_2 konstruiert man den Automaten $\mathsf{D}_\circ$ mit $\mathsf{L}(\mathsf{D}_\circ) = \mathsf{L}(\mathsf{D}_1) \circ \mathsf{L}(\mathsf{D}_2)$, indem man die Produktkonstruktion anwendet und dann die Zustände (q, r) zu Endzuständen macht, für die gilt, dass $q \in \mathsf{F}_1 \odot r \in \mathsf{F}_2$.

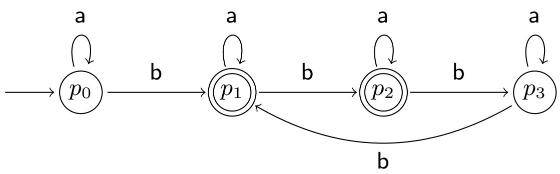
AUFGABE 3.5. (*Minimierung*) Stufe B/C

Minimieren Sie die folgenden DFAs.

(a) DFA D_1:



(b) DFA D_2:

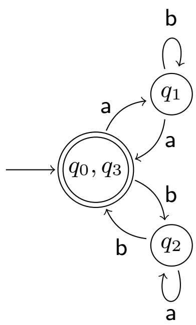


Lösungsskizze

(a) Tabelle:

	q_0	q_1	q_2	q_3
q_0	—	—	—	—
q_1	ε	—	—	—
q_2	ε	a	—	—
q_3	=	ε	ε	—

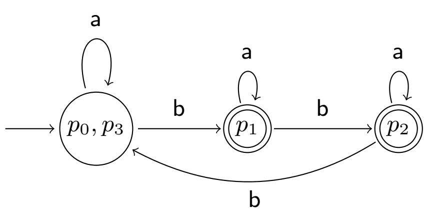
Minimierter DFA D_1^m:



(b) Tabelle:

	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	—	—	—	—
p_1	ε	—	—	—
p_2	ε	b	—	—
p_3	=	ε	ε	—

Minimierter DFA D_2^m:

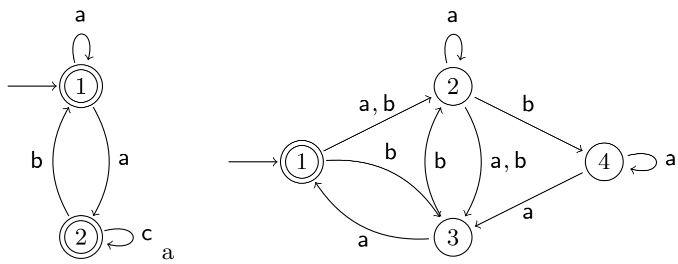


AUFGABE 3.6. (*Ardens Lemma*) Stufe C

Betrachten Sie die beiden NFAs N_a und N_b.

(a) Geben Sie für beide NFAs das nach Vorlesung dazugehörige Gleichungssystem an.

(b) Geben Sie dann für jeden der beiden NFAs mittels Gauß-Verfahren und Ardens Lemma einen regulären Ausdruck r_a bzw. r_b an, sodass $\mathsf{L}(\mathsf{N}_a) = \mathsf{L}(\mathsf{r}_a)$ bzw. $\mathsf{L}(\mathsf{N}_b) = \mathsf{L}(\mathsf{r}_b)$



(a) NFA N_a **(b)** NFA N_b

Lösungsskizze

Die Variable X_i für einen Zustand i wird gleichgesetzt mit der Vereinigung der Variablen der in einem Schritt erreichbaren Zuständen mit der Kantenbeschriftung als Präfix. Zusätzlich fügen wir die Konstante $\{\varepsilon\}$ für Endzustände ein.

(a) Aufstellen des Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{X}_1 & \equiv & \varepsilon \mid \mathsf{aX}_1 \mid \mathsf{aX}_2 \\ \mathsf{X}_2 & \equiv & \varepsilon \mid \mathsf{bX}_1 \mid \mathsf{cX}_2 \end{array}$$

Lösen nach X_1:

$$\begin{array}{lcll} \mathsf{X}_2 & \equiv & \mathsf{cX}_2 \mid (\varepsilon \mid \mathsf{bX}_1) & \text{Umformen} \\ \mathsf{X}_2 & \equiv & \mathsf{c}^*(\varepsilon \mid \mathsf{bX}_1) & \text{Ardens Lemma} \\ \mathsf{X}_1 & \equiv & \varepsilon \mid \mathsf{aX}_1 \mid \mathsf{a}(\mathsf{c}^*(\varepsilon \mid \mathsf{bX}_1)) & \text{Einsetzen von } \mathsf{X}_2 \\ \mathsf{X}_1 & \equiv & (\mathsf{a} \mid \mathsf{ac}^*\mathsf{b})\mathsf{X}_1 \mid (\varepsilon \mid \mathsf{ac}^*) & \text{Umformen} \\ \mathsf{X}_1 & \equiv & (\mathsf{a} \mid \mathsf{ac}^*\mathsf{b})^*(\varepsilon \mid \mathsf{ac}^*) & \text{Ardens Lemma} \end{array}$$

(b) Aufstellen des Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{X}_1 & \equiv & \varepsilon \mid (\mathsf{a}|\mathsf{b})\mathsf{X}_2 \mid \mathsf{bX}_3 \\ \mathsf{X}_2 & \equiv & \mathsf{aX}_2 \mid (\mathsf{a}|\mathsf{b})\mathsf{X}_3 \mid \mathsf{bX}_4 \\ \mathsf{X}_3 & \equiv & \mathsf{aX}_1 \mid \mathsf{bX}_2 \\ \mathsf{X}_4 & \equiv & \mathsf{aX}_3 \mid \mathsf{aX}_4 \end{array}$$

Lösen nach X_1:

$$\begin{array}{lcll} \mathsf{X}_1 & \equiv & \varepsilon \mid \mathsf{baX}_1 \mid (\mathsf{a}|\mathsf{b}|\mathsf{bb})\mathsf{X}_2 & \text{Einsetzen von } \mathsf{X}_3 \\ \mathsf{X}_2 & \equiv & (\mathsf{aa}|\mathsf{ba})\mathsf{X}_1 \mid (\mathsf{a}|\mathsf{ab}|\mathsf{bb})\mathsf{X}_2 \mid \mathsf{bX}_4 & \text{Einsetzen von } \mathsf{X}_3 \\ \mathsf{X}_4 & \equiv & \mathsf{aaX}_1 \mid \mathsf{abX}_2 \mid \mathsf{aX}_4 & \text{Einsetzen von } \mathsf{X}_3 \\ \mathsf{X}_4 & \equiv & \mathsf{a}^*(\mathsf{aaX}_1 \mid \mathsf{abX}_2) & \text{Ardens Lemma} \\ \mathsf{X}_2 & \equiv & (\mathsf{aa}|\mathsf{baa}^*)\mathsf{X}_1 \mid (\mathsf{a}|\mathsf{ab}|\mathsf{ba}^*\mathsf{b})\mathsf{X}_2 & \text{Einsetzen von } \mathsf{X}_4 \\ \mathsf{X}_2 & \equiv & (\mathsf{a}|\mathsf{ab}|\mathsf{ba}^*\mathsf{b})^*(\mathsf{aa}|\mathsf{baa}^*)\mathsf{X}_1 & \text{Ardens Lemma} \\ \mathsf{X}_1 & \equiv & \varepsilon \mid (\mathsf{ba} \mid (\mathsf{a}|\mathsf{b}|\mathsf{bb})(\mathsf{a}|\mathsf{ab}|\mathsf{ba}^*\mathsf{b})^*(\mathsf{aa}|\mathsf{baa}^*))\mathsf{X}_1 & \text{Einsetzen von } \mathsf{X}_2 \\ \mathsf{X}_1 & \equiv & (\mathsf{ba} \mid (\mathsf{a}|\mathsf{b}|\mathsf{bb})(\mathsf{a}|\mathsf{ab}|\mathsf{ba}^*\mathsf{b})^*(\mathsf{aa}|\mathsf{baa}^*))^* & \text{Ardens Lemma} \end{array}$$

AUFGABE 3.7. (*Pumping Lemma*) Stufe C

Beweisen Sie für jede der folgenden Sprachen mithilfe des Pumping Lemmas, dass sie *nicht* regulär sind.

(a) $\mathsf{L}_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$

(b) $\mathsf{L}_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geq |w|_1\}$

(c) $\mathsf{L}_3 = \{\varepsilon, \mathsf{a}, \mathsf{a}^{n \cdot m} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m > 1, n > 1\}$

(d) $\mathsf{L}_4 = \{\mathsf{a}^{6i}\mathsf{b}^{6i} \mid i \geq 0\}$

(e) $\mathsf{L}_5 = \{\mathsf{a}^{2^i} \mid i \geq 0\}$

Lösungsskizze

(a)
- Angenommen, L_1 wäre regulär.
- Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
- Dann gilt $z = 0^n 10^n \in \mathsf{L}_1$ und $|z| \geq n$.
- Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, sodass $uv^i w \in \mathsf{L}_1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$(*).
- Durch unsere Wahl von z folgt $uv = 0^k$ für $0 < k \leq n$. Also $u = 0^i$ und $v = 0^j$ mit $i + j = k$ und $j > 0$.
- Dann ist aber $uv^2 w = 0^i 0^{2j} 0^{n-k} 10^n \notin \mathsf{L}_1$, denn $i + 2j + n - k > n$. Dies steht im Widerspruch zu $(*)$.
- Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_1 nicht regulär.

(b)
- Angenommen, L_2 wäre regulär.
- Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
- Dann gilt $z = 0^n 1^n \in \mathsf{L}_2$ und $|z| \geq n$.
- Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, sodass $uv^i w \in \mathsf{L}_2$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$(*).
- Aus unserer Wahl von z folgt, dass $u = 0^i$ und $v = 0^j$ mit $j > 0$ gilt.
- Allerdings ist $uv^0 w = 0^i 0^{n-i-j} 1^n \notin \mathsf{L}_2$, weil $n - i - j < n$ Dies steht im Widerspruch zu $(*)$.
- Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_2 nicht regulär.

(c)
- Angenommen, L_3 wäre regulär.
- Da die regulären Sprachen unter Komplement abgeschlossen sind, ist auch

$$\overline{\mathsf{L}_3} = \{\mathsf{a}^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 1, n \text{ ist prim}\}$$

  regulär.
- Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
- Da die Menge der Primzahlen bekanntlich unendlich ist, gibt es eine Primzahl p bzw. ein $z = \mathsf{a}^p \in \overline{\mathsf{L}_3}$, sodass z mindestens n Zeichen enthält, also $|z| \geq n$. Sei also $z \in \mathsf{L}$ mit $|z| \geq n$.
- Es gibt für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, sodass $uv^i w \in \overline{\mathsf{L}_3}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$(*).
- Wegen $uw = uv^0 w \in \overline{\mathsf{L}_3}$ ist $|uw|$ eine Primzahl. Wir setzen $\mathsf{x} = uv^{|uw|}w$.
  Es gilt $\mathsf{x} \in \overline{\mathsf{L}_3}$, d. h. $|\mathsf{x}|$ ist eine Primzahl. Es folgt aber auch $|\mathsf{x}| = |uw| + |uw|\,|v| = |uw|\,(1 + |v|)$, d.h. $|\mathsf{x}|$ ist wegen $|v| \neq 0$ keine Primzahl. Widerspruch.
- Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und $\overline{\mathsf{L}_3}$ ist nicht regulär, somit ist auch L_3 nicht regulär.
- *Hinweis*: Eine andere zielführende Wahl für i wäre $p + 1$ gewesen, da man dann folgendes erhält:

$$\left|uv^i w\right| = |uw| + |v|\,(p+1) = p - |v| + |v|\,(p+1) = (|v| + 1)p$$

(d)
- Angenommen, L_4 wäre regulär.
- Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
- Dann gilt $z = \mathsf{a}^{6n}\mathsf{b}^{6n} \in \mathsf{L}_4$ und $|z| \geq n$.
- Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, sodass $uv^i w \in \mathsf{L}_4$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$(*).
- Deshalb $v = \mathsf{a}^j$ für ein $0 < j \leq n$.
- Dann ist aber $uv^0 w = \mathsf{a}^{6n-j}\mathsf{b}^{6n} \notin \mathsf{L}_4$, denn $6n - j < 6n$. Dies steht im Widerspruch zu $(*)$
- Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_4 nicht regulär.

(e)
- Angenommen, L_5 wäre regulär.
- Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
- Dann gilt $\mathsf{a}^{2^n} \in \mathsf{L}_5$ und $\left|\mathsf{a}^{2^n}\right| \geq n$.
- Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, sodass $uv^i w \in \mathsf{L}_5$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$(*).
- Deshalb $v = \mathsf{a}^j$ für ein $0 < j \leq n$.
- Dann ist aber $uv^2 w = \mathsf{a}^{2^n + j} \notin \mathsf{L}_5$, denn

$$2^n < 2^n + j \leq 2^n + n < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

  Dies steht im Widerspruch zu $(*)$.
- Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_4 nicht regulär.

AUFGABE 3.8. (*Umkehrung (Spiegelung)*) Stufe D

Ziel dieser Aufgabe ist, die Umkehrung einer Sprache zu berechnen, d.h. für jede reguläre Sprache L die Sprache L^R anzugeben, sodass $\mathsf{L}^R := \{w^R \mid w \in \mathsf{L}\}$.
Geben Sie einen Algorithmus an, der einen DFA D in einen ε-NFA N übersetzt, sodass $\mathsf{L}(\mathsf{D})^R = \mathsf{L}(\mathsf{N})$. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens.

Lösungsskizze
Wir Verfahren nach Satz 3.23 der Vorlesung. Sei $\mathsf{D} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \delta, q_0, \mathsf{F})$ ein DFA.

Konstruktion: Wir definieren den ε-NFA $N := (\mathsf{Q}', \Sigma, \delta', q_0', \mathsf{F}')$ wie folgt:

- $\mathsf{Q}' := \mathsf{Q} \cup \{q_0'\}$, wobei $q_0' \notin \mathsf{Q}$
- $(q_0', \varepsilon, q_f) \in \delta'$ für alle $q_f \in \mathsf{F}$
- $(p, x, q) \in \delta'$ für alle $(q, x, p) \in \delta$
- $\mathsf{F}' := \{q_0\}$

Korrektheit: Sei $w = w_1 \cdots w_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $w_i \in \Sigma$. Wir müssen zeigen, dass $w \in \mathsf{L}(\mathsf{D})$ genau dann wenn $w^R \in \mathsf{L}(\mathsf{N})$. Wir schreiben im Folgenden $q \xrightarrow{w_1}_{\mathsf{D}} \cdots \xrightarrow{w_n}_{\mathsf{D}} q'$ für $\hat{\delta}(q, w_1 \cdots w_n) = q'$ und analoges für N.[1]

Informelle Idee: Die Konstruktion stellt sicher, dass die Existenz einen Laufes $q_0 \xrightarrow{w_1}_{\mathsf{D}} \cdots \xrightarrow{w_n}_{\mathsf{D}} q_f$ einen Lauf $q_f \xrightarrow{w_n}_{\mathsf{N}} \cdots \xrightarrow{w_1}_{\mathsf{N}} q_0$ bedingt (und anders rum), da einfach alle Transitionen per Konstruktion umgedreht wurden. Der Lauf in D ist akzeptierend, da $q_f \in \mathsf{F}$. Der Lauf in N bedingt einen akzeptierenden Lauf (und anders rum), da $\mathsf{F}' = \{q_0\}$ und die Transition $q_0' \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathsf{N}} q_f$ existiert (da $q_f \in \mathsf{F}$).

Formal haben wir:

$$\begin{aligned}
w \in \mathsf{L}(\mathsf{D}) &\iff \text{Es gibt einen Lauf } q_0 \xrightarrow{w_1}_{\mathsf{D}} \cdots \xrightarrow{w_n}_{\mathsf{D}} q_f \text{ mit } q_f \in \mathsf{F} \\
&\iff \text{Es gibt einen Lauf } q_f \xrightarrow{w_n}_{\mathsf{N}} \cdots \xrightarrow{w_1}_{\mathsf{N}} q_0 \text{ mit } q_f \in \mathsf{F} && (1) \\
&\iff \text{Es gibt einen Lauf } q_0' \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathsf{N}} q_f \xrightarrow{w_n}_{\mathsf{N}} \cdots \xrightarrow{w_1}_{\mathsf{N}} q_0 \text{ mit } q_f \in \mathsf{F} && (q_f \in \mathsf{F} \text{ und } (q_0', \varepsilon, q_f) \in \delta') \\
&\iff w^R \in \mathsf{L}(\mathsf{N}) && (\mathsf{F}' = \{q_0\})
\end{aligned}$$

Um Aussage (1) zu beweisen, müssen wir zunächst folgendene stärkere Aussage per Induktion über n beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\, \forall w \in \Sigma^n.\, \forall q \in \mathsf{Q}.\, \left(q_0 \xrightarrow{w_1}_{\mathsf{D}} \cdots \xrightarrow{w_n}_{\mathsf{D}} q \iff q \xrightarrow{w_n}_{\mathsf{N}} \cdots \xrightarrow{w_1}_{\mathsf{N}} q_0\right)$$

Im Fall $n = 0$ gilt $w = \varepsilon$. Da N keine ε-Transitionen ausgehend von $q \in \mathsf{Q}$ besitzt, folgt $q = q_0$ und somit die Aussage.

Im Fall $n + 1$ wählen wir $w = va$ mit $a \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^n$. Per Induktionshypothese erhalten wir

$$\forall q \in \mathsf{Q}.\, \left(q_0 \xrightarrow{v_1}_{\mathsf{D}} \cdots \xrightarrow{v_n}_{\mathsf{D}} q \iff q \xrightarrow{v_n}_{\mathsf{N}} \cdots \xrightarrow{v_1}_{\mathsf{N}} q_0\right).$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}
q_0 \xrightarrow{w_1}_{\mathsf{D}} \cdots \xrightarrow{w_{n+1}}_{\mathsf{D}} q &\iff q_0 \xrightarrow{v_1}_{\mathsf{D}} \cdots \xrightarrow{v_n}_{\mathsf{D}} p \xrightarrow{a}_{\mathsf{D}} q \text{ für ein } p \in \mathsf{Q} \\
&\iff p \xrightarrow{v_n}_{\mathsf{N}} \cdots \xrightarrow{v_1}_{\mathsf{N}} q_0 \text{ und } p \xrightarrow{a}_{\mathsf{D}} q \text{ für ein } p \in \mathsf{Q} && \text{(IH)} \\
&\iff p \xrightarrow{v_n}_{\mathsf{N}} \cdots \xrightarrow{v_1}_{\mathsf{N}} q_0 \text{ und } q \xrightarrow{a}_{\mathsf{N}} p \text{ für ein } p \in \mathsf{Q} && (\text{Def. } \delta') \\
&\iff q \xrightarrow{a}_{\mathsf{N}} p \xrightarrow{v_n}_{\mathsf{N}} \cdots \xrightarrow{v_1}_{\mathsf{N}} q_0 \text{ für ein } p \in \mathsf{Q} \\
&\iff q \xrightarrow{w_{n+1}}_{\mathsf{N}} \cdots \xrightarrow{w_1}_{\mathsf{N}} q_0
\end{aligned}$$

Behauptung (1) folgt nun durch Instanziierung des Aussage mit q_f. $\square$

[1] Man kann alle folgenden Schritte – etwas unübersichtlicher aber formeller – mit der $\hat{\delta}$ Notation anschreiben (vgl. Beweis der Übungsaufgabe 2.4)