Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt Lösungsskizze 4

AUFGABE 4.1. (*Spieglein, Spieglein an der Wand*) 0,5 Punkte (a)+(b) + 1,5 Punkte (c)

Gegeben sei die folgende Grammatik G:

$$\mathsf{S} \to a\mathsf{S}a \mid b\mathsf{S}b \mid a\mathsf{T}b \mid b\mathsf{T}a$$
$$\mathsf{T} \to a\mathsf{T} \mid b\mathsf{T} \mid \varepsilon$$

(a) Welche Sprache beschreibt G? Geben Sie eine intensionale Mengendarstellung[1] L für $\mathsf{L}(\mathsf{G})$ an.
(b) Zeigen oder widerlegen Sie: L ist regulär.
(c) Zeigen Sie $\mathsf{L}(\mathsf{G}) = \mathsf{L}$ formal. Beweisen Sie dabei auch induktiv, welche Sprache von T erzeugt wird.

Lösungsskizze
Sei $\Sigma := \{a, b\}$.

(a) $\mathsf{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w \neq w^R\}$.
(b) Nach Tutoraufgabe 3.7 (a) ist $\overline{\mathsf{L}}$ nicht regulär. Da reguläre Sprachen unter Komplement abgeschlossen sind, ist somit auch $\overline{\overline{\mathsf{L}}} = \mathsf{L}$ nicht regulär.
(c) Zunächst zeigen wir $\mathsf{L}_\mathsf{G}(\mathsf{T}) = \Sigma^*$.
   (i) Wir zeigen $\mathsf{L}_\mathsf{G}(\mathsf{T}) \subseteq \Sigma^*$ per Induktion über die Erzeugung von Wörtern in $\mathsf{L}_\mathsf{G}(\mathsf{T})$. Der Fall $\mathsf{T} \to \varepsilon$ ist klar. Im Fall $T \to aw$ mit $\mathsf{T} \to^* w$ erhalten wir per IH $w \in \Sigma^*$ und somit $aw \in \Sigma^*$. Der Fall $T \to bw$ folgt analog.
   (ii) Wir zeigen $\Sigma^* \subseteq \mathsf{L}_\mathsf{G}(\mathsf{T})$ per Induktion über die Wortlänge $w \in \Sigma^*$. Der Fall $w = \varepsilon$ gilt wegen $\mathsf{T} \to \varepsilon$. Im Fall $w \in \Sigma^{n+1}$ gibt es $x \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^n$ mit $w = xv$. Per IH gibt es eine Ableitung $\mathsf{T} \to^* v$. Falls $x = a$ folgt $\mathsf{T} \to a\mathsf{T} \to^* av$. Falls $x = b$ folgt $\mathsf{T} \to b\mathsf{T} \to^* bv$.

   Nun zeigen wir $\mathsf{L}(\mathsf{G}) = \mathsf{L}$.
   (i) Wir zeigen $\mathsf{L}(\mathsf{G}) \subseteq \mathsf{L}$ per Induktion über die Erzeugung von Wörtern in $\mathsf{L}_\mathsf{G}(\mathsf{T})$. Im Fall $S \to awb$ mit $\mathsf{T} \to^* w$ wissen wir nach vorherigem $w \in \Sigma^*$. Somit $awb \in \Sigma^*$. Außerdem gilt $awb \neq bw^Ra = (awb)^R$. Der Fall $S \to bwa$ folgt analog.
   Im Fall $\mathsf{S} \to awa$ mit $\mathsf{S} \to^* w$ erhalten wir per IH $w \in \Sigma^*$ mit $w \neq w^R$. Somit gilt $awa \neq aw^Ra = (awa)^R$. Der Fall $\mathsf{S} \to bwb$ folgt analog.
   (ii) Wir zeigen $\mathsf{L} \subseteq \mathsf{L}(\mathsf{G})$ per vollständiger Induktion über die Wortlänge n von $w = w_1 \cdots w_n \in \mathsf{L}$. Da $w \in \mathsf{L}$, gilt $w = w_1 \cdots w_n \neq w_n \cdots w_1 = w^R$.
   In den Fällen $n \in \{0, 1\}$ folgt $w = w^R$. Mit der Annahme $w \neq w^R$ folgt ein Widerspruch und somit $w \in \mathsf{L}(\mathsf{G})$.
   Im Fall $n \geq 2$ gibt es $1 \leq i \leq n$ mit $w_i \neq w_{n-i+1}$. Wir betrachten zwei Fälle:
      i. Fals $i = 1$, gibt es $x, y \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^{n-2}$ mit $x \neq y$ und $w = xvy$. Nach vorherigem gibt es weiters eine Ableitung $\mathsf{T} \to^* v$. Im Fall $x = a, y = b$ folgt somit $\mathsf{S} \to a\mathsf{T}b \to^* avb$. Analog folgt der Fall $x = b, y = a$.
      ii. Falls $i > 1$, gibt es $x \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^{n-2}$ mit $w = xvx$. Da $xvx \neq xv^Rx = (xvx)^R$ folgt $v \neq v^R$. Per IH erhalten wir somit eine Ableitung $\mathsf{S} \to^* v$. Falls nun $x = a$, folgt $\mathsf{S} \to a\mathsf{S}a \to^* ava$ und analoges gilt $x = b$.

AUFGABE 4.2. (*Myhill-Nerode*) 0,5 + 1 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Sprachen regulär sind. Bestimmen Sie hierzu die Äquivalenzklassen der dazugehörigen Myhill-Nerode-Relation. Falls die Sprache regulär ist, zählen Sie alle Äquivalenzklassen auf und zeichnen Sie den kanonischen Minimalautomaten. Falls die Sprache nicht regulär ist, reicht es eine unendliche Menge von Äquivalenzklassen anzugeben und zu zeigen dass die Elemente dieser Menge paarweise verschieden sind.

(a) $\mathsf{L}_1 = \mathsf{L}((\mathsf{bba}|\mathsf{bab})^*)$ mit dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$
(b) $\mathsf{L}_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \neq w^R\}$ mit dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$

[1] Das heißt, eine Beschreibung der Form $\mathsf{L} := \{w \in A \mid P(a)\}$ für eine geeignete Menge A und Prädikat P.

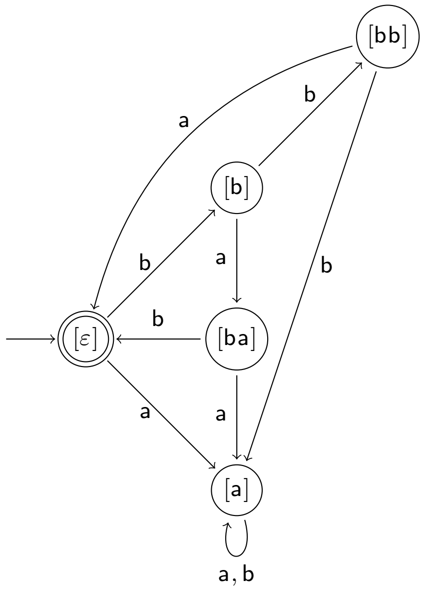
Lösungsskizze

(a) • Bestimmen der Äquivalenzklassen:

$$[\varepsilon] = \mathsf{L}_1 \qquad [\mathsf{b}] = \{w\mathsf{b} \mid w \in \mathsf{L}_1\} \qquad [\mathsf{ba}] = \{w\mathsf{ba} \mid w \in \mathsf{L}_1\} \qquad [\mathsf{bb}] = \{w\mathsf{bb} \mid w \in \mathsf{L}_1\}$$

$$[\mathsf{a}] = \{vw \mid v \in \mathsf{L}_1, w \in \mathsf{L}((\mathsf{a} \mid \mathsf{bbb} \mid \mathsf{baa})(\mathsf{a}|\mathsf{b})^*)\}$$

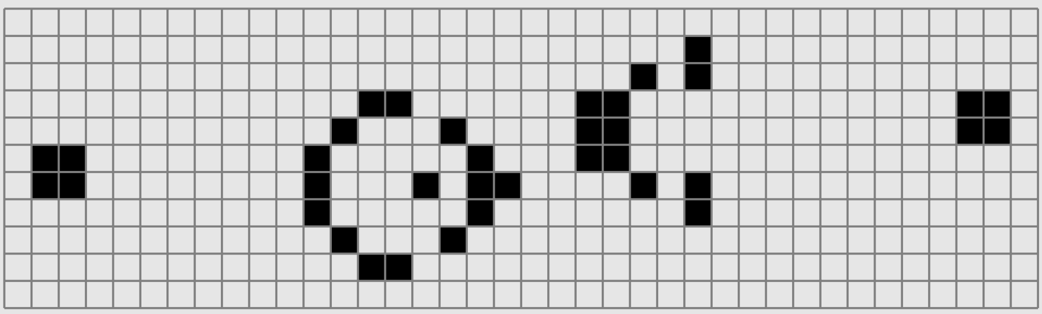
• Kanonischer DFA:



(b) Bestimmen einer unendlichen Menge von Äquivalenzklassen:

$$\{[(\mathsf{ab})^i] \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Beweis: Sei $i, j \in \mathbb{N}$ verschieden und ohne Einschränkung der Allgemeinheit $i < j$. Dann gilt $(\mathsf{ab})^i(\mathsf{ba})^i \notin \mathsf{L}_2$. Für $w = (\mathsf{ab})^j(\mathsf{ba})^i$ ist aber $w^R = (\mathsf{ab})^i(\mathsf{ba})^j$ und somit gilt wegen $i < j$ dass $w \in \mathsf{L}_2$. Daher $[(\mathsf{ab})^i] \neq [(\mathsf{ab})^j]$. Somit ist die Menge unendlich und L_2 keine reguläre Sprache.



— in Erinnerung an John Conway (26. Dezember 1937 – 11. April 2020)