Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt Lösungsskizze 5

AUFGABE 5.1. (*Cocke–Younger–Kasami*) 0.5P

Lösen Sie die Aufgaben "H5.1 a" und "H5.1 b" im AutomataTutor unter der Kategorie "CYK Algorithm". **Beachten Sie, dass Sie pro Aufgabe nur 2 Fehler machen dürfen**.

AUFGABE 5.2. 1P

Gegegeben sei eine Grammatik $\mathsf{G} = (V, \Sigma, P, \mathsf{S})$ in Chomsky-Normalform, d.h. jede Produktion in P hat entweder die Form $\mathsf{X} \to \mathsf{YZ}$ mit $\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z} \in V$ oder $\mathsf{X} \to \mathsf{a} \in \Sigma$. Geben Sie eine Grammatik G_s an, sodass $\mathsf{L}(\mathsf{G}_s)$ alle nicht-leeren Suffixe der Sprache $\mathsf{L}(\mathsf{G})$ enthält. Genauer soll $\mathsf{L}(\mathsf{G}_s) = \{v \mid uv \in \mathsf{L}(\mathsf{G}) \land v \neq \varepsilon\}$ gelten.

Lösungsskizze

Wir definieren $\mathsf{G}_s = (V_s, \Sigma, P_s, \mathsf{S}_s)$ wobei

$$\begin{aligned}
V_s &= V \cup \{\mathsf{X}_s \mid \mathsf{X} \in V\}\\
P_s &= P \cup \{\mathsf{X}_s \to a \mid \mathsf{X} \to a \in P\}\\
&\quad \cup \{\mathsf{X}_s \to \mathsf{Y}_s\mathsf{Z} \mid \mathsf{X} \to \mathsf{YZ} \in P\}\\
&\quad \cup \{\mathsf{X}_s \to \mathsf{Z}_s \mid \mathsf{X} \to \mathsf{YZ} \in P\}
\end{aligned}$$

AUFGABE 5.3. (*Dieses doofe Trennzeichen*) 2P

Sei $\Sigma := \{a, b, \nabla\}$. Zeigen oder widerlegen Sie: Die Sprache $\mathsf{L} := \{u\nabla v \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u| = |v|, u \neq v\}$ ist kontextfrei.

Lösungsskizze

- Wir nehmen an, dass L kontextfrei ist und führen diese Annahme zum Widerspruch.
- Sei $n \geq 1$ eine Pumping-Lemma-Zahl für die kontextfreie Sprache L.
- Setze $f := n + n!$ und $z := a^f b^n \nabla a^n b^f$. Wir haben $z \in \mathsf{L}$ und $|z| \geq n$.
- Gemäß Pumping-Lemma gibt es dann also eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit Wörtern $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ und den folgenden Eigenschaften:

$$(1)\ vx \neq \varepsilon \qquad (2)\ |vwx| \leq n \qquad (3)\ \forall i \in \mathbb{N}.\ uv^iwx^iy \in \mathsf{L}$$

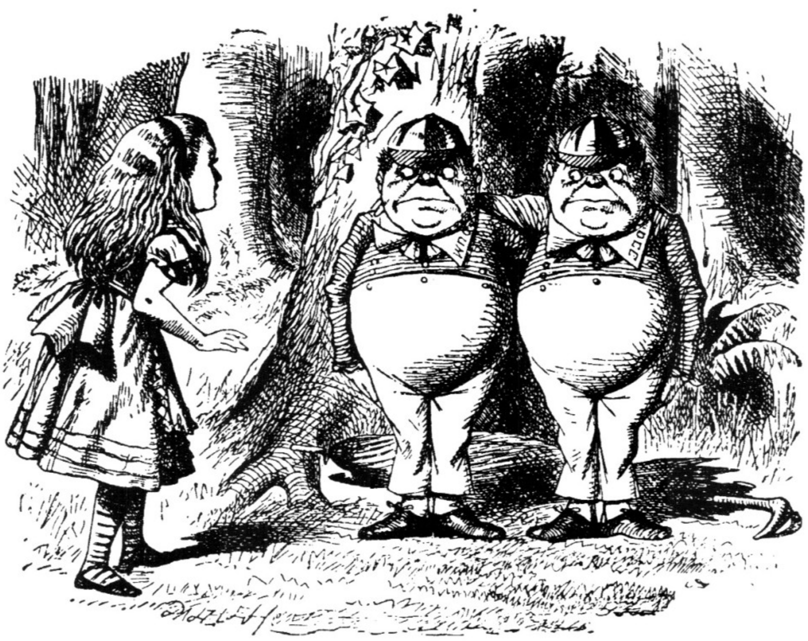
- Wir unterscheiden folgende Fälle:
  (a) $|vx|_\nabla \neq 0$: Dann gilt $\left|uv^0wx^0y\right|_\nabla = 0$ und somit $uv^0wx^0y \notin \mathsf{L}$. Dies ist ein Widerspruch zu (3).
  (b) v, x befinden sich links von ∇: Dann hat aufgrund (1) uv^0wx^0y die Form $w_1\nabla w_2$ mit $|w_1| < |w_2|$ und somit $uv^0wx^0y \notin \mathsf{L}$. Dies ist ein Widerspruch zu (3).
  (c) v, x befinden sich rechts von ∇: Analog zu vorherigem.
  (d) v befindet sich links und x rechts von ∇: Wir betrachten drei Fälle:
    (i) $|v| < |x|$: Dann hat uv^0wx^0y die Form $w_1\nabla w_2$ mit $|w_1| < |w_2|$ und somit $uv^0wx^0y \notin \mathsf{L}$. Dies ist ein Widerspruch zu (3).
    (ii) $|v| > |x|$: Analog zu vorherigem.
    (iii) $|v| = |x|$: Sei $k := |v|$. Aufgrund von (2) muss $v = b^k$ und $x = a^k$ gelten. Wegen (3) gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$, dass $uv^{i+1}wx^{i+1}y = a^f b^{n+ik} \nabla a^{n+ik} b^f \in \mathsf{L}$. Wir wissen $a^f b^f \nabla a^f b^f \notin \mathsf{L}$. Um einen Widerspruch abzuleiten, reicht es also $i \in \mathbb{N}$ so zu wählen, dass $n + ik = f = n + n!$ gilt. Wir setzen also $i := n!/k$. Wegen (1) gilt $k > 0$ und wegen (2) gilt $k < n$. Somit ist k ein Teiler von $n!$, d.h. $i \in \mathbb{N}$. Somit folgt auch in diesem Fall ein Widerspruch.
- Da jeder Fall zu einem Widerspruch führt und die obigen Fälle alle möglichen Zerlegungen abdecken, kann die ursprüngliche Annahme nicht gelten. Also ist L nicht kontextfrei.

AUFGABE 5.4. 2P

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Programmieraufgabe auf TUMjudge(`https://judge.in.tum.de/theo/public/`). Zur Bearbeitung der Hausaufgabe gehen Sie wie folgt vor.

- Lesen Sie sich die PDF-Angabe zu der Aufgabe 'CFGFinite' durch (zu finden unter 'course/problems' auf TUMjudge).
- Laden Sie das Codegerüst für die Hausaufgabe auf Moodle herunter.
- Wir stellen ein Gerüst in Haskell und in Java bereit.

- Implementieren Sie alle mit `TODO` markierten Methoden in der Klasse `Finiteness`, bzw. die undefinierten Funktionen im Modul `Main` des Haskell Templates.
- Laden Sie dann für Problem A (CFGFinite) alle benötigten Dateien hoch – falls Sie eines unserer Templates benutzen, müssen Sie *alle* Dateien des Templates hochladen, nicht nur die, die Sie verändert haben.



> "If it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic."
>
> — Lewis Carroll in Alice hinter den Spiegeln (Through the Looking-Glass)