Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt Lösungsskizze 6

AUFGABE 6.1. 0,5P + 0,5P
Bearbeiten Sie die Aufgaben *Skylines* and *Logical formulae* unter der Kategorie *PDA Construction* auf Automata-Tutor.

AUFGABE 6.2. 1P
Gegeben sei ein PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ mit $|Q| = r$, $|\Sigma| = s$, und $|\Gamma| = t$. Außerdem hat jeder String der in einer Transition auf den Stack gelegt wird maximal die Länge u, das heißt es gilt für jede Transition $(q, \alpha) \in \delta(q, a, Z)$ dass $|\alpha| \leq u$.
Geben Sie eine möglichst genaue obere Schranke für die Anzahl der Variablen und Produktionen der CFG an, die durch das Verfahren nach Satz 4.60 aus M hervorgeht. Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösungsskizze
In Satz 4.60 wird die Menge der Variablen als $V := (Q \times \Gamma \times Q) \cup \{S\}$ definiert, daraus folgt $|V| = r^2t + 1$.
Es werden für alle $r_1, \dots, r_k \in Q$ und alle $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$ Produktionen hinzugefügt, die im Worst Case alle benötigt werden. Hierbei gilt laut Angabe $0 \leq k \leq u$.
Für die Zustände $r_1, \dots, r_k$ und die Stacksymbole $Z_1 \dots, Z_k$ ergeben sich damit $\sum_{i=0}^{u} (rt)^i$ Kombinationen, da es auch möglich ist kein neues Symbol auf den Stack zu legen.
Da es für r_0, q, b, und Z insgesamt $r^2(s + 1)t$ Möglichkeiten gibt ($s + 1$, da auch ε Transitionen erlaubt sind), erhält man insgesamt $r^2(s + 1)t \sum_{i=0}^{u} (rt)^i$ Möglichkeiten.
Dazu kommt noch je eine Produktion von S für jedes $q \in Q$, somit ergibt sich insgesamt

$$P = r + (r^2(s + 1)t \sum_{i=0}^{u} (rt)^i)$$

AUFGABE 6.3. (*Mit DPDAs auf reguläre Sprachen schießen*) 1,5P
Gegeben sei eine reguläre Sprache R. Zeigen Sie: Es existiert ein DPDA P, der R akzeptiert. Konstruieren Sie hierfür einen DPDA aus einer geeigneten Darstellung von R. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Lösungsskizze
Da R regulär ist, gibt es einen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $\mathsf{L}(A) = R$. Wir definieren $P := (Q, \Sigma, \{Z\}, q_0, Z, \delta', F)$, wobei $\delta'(q, \mathsf{a}, Z) = \{(p, Z)\} \Leftrightarrow \delta(q, \mathsf{a}) = p$. Analog zu der Schreibweise für DPDAs beschreiben wir Konfigurationübergänge von A mit $(q, w_1 \dots w_n) \to_A (p, w_2 \dots w_n)$, wobei $\delta(q, w_1) = p$. Der A akzeptiert also ein Wort w, wenn es eine Folge von Konfigurationsübergängen $(q_0, w) \to_A^* (q_F, \varepsilon)$ mit $q_F \in F$ gibt.
Behauptung: $R = \mathsf{L}(A) = \mathsf{L}(P)$. Dazu reicht es die Aussage $\forall w.\ \forall s_F \in F.\ (q_0, w, Z) \to_P^* (s_F, \varepsilon, Z) \Leftrightarrow (q_0, w) \to_A^* (s_F, \varepsilon)$ zu zeigen, da sich der Stack per Definition von δ' nicht ändern kann. Um einen Induktionsbeweis zu führen, müssen wir allerdings zunächst q_0 zu einem beliebigen Zustand $q \in Q$ verallgemeinern.

Beweis. Induktion auf der Länge des Wortes w.

Fall $w = \varepsilon$.
Da es sowohl in A als auch P keine ε-Transitionen gibt ändert sich die Konfiguration durch das Einlesen von ε nicht und es gilt $(q, \varepsilon, Z) \to_P^* (s_F, \varepsilon, Z) = (q, \varepsilon, Z) \Leftrightarrow (q, \varepsilon) \to_A^* (s_F, \varepsilon) = (q, \varepsilon)$.

Fall $w = w_1 \dots w_n$. Als Induktionshypothese erhalten wir, dass für alle u mit $|u| < n$

$$\forall q \in Q.\ \forall s_F \in F.\ (q, u, Z) \to_P^* (s_F, \varepsilon, Z) \Leftrightarrow (q, u) \to_A^* (s_F, \varepsilon)$$

gilt. Wir haben

$$\begin{aligned} (s_0, w, Z) = (s_0, w_1 \dots w_n, Z) \to_P^* (s_F, \varepsilon, Z) &\Leftrightarrow \exists s_1.\ (s_0, w_1 \dots w_n, Z) \to_P (s_1, w_2 \dots w_n, Z) \to_P^* (s_F, \varepsilon, Z) \\ \text{(Definition von } \delta' \text{ und I.H.)} &\Leftrightarrow \exists s_1.\ (s_0, w_1 \dots w_n) \to_A (s_1, w_2 \dots w_n) \to_A^* (s_F, \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow (s_0, w_1 \dots w_n) \to_A^* (s_F, \varepsilon). \\ &\Leftrightarrow (s_0, w) \to_A^* (s_F, \varepsilon). \end{aligned}$$

□ 1,5P

AUFGABE 6.4. (*Hast du den Schleifentrick erst raus...*)
Ein *Schleifomat* M ist ähnlich zu einem Kellerautomat, aber bevorzugt es seinen Speicher in einer Schleife anstatt in einem Stapel zu speichern. Formell ist ein Schleifomat ein 6-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, wobei Q die Zustandsmenge, Σ das Eingabealphabet, Γ das Schleifenalphabet, $q_0 \in Q$ der Startzustand, $Z_0 \in \Gamma$ der initiale Schleifeninhalt und $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ die Übergangsfunktion ist. Die Übergänge eines Schleifomats können graphisch genauso dargestellt werden, wie die eines Kellerautomaten.
Eine Konfiguration eines Schleifomatens ist ein Tripel $(q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$, wobei q der aktuelle Zustand, w das noch zu lesende Wort und γ der aktuelle Schleifeninhalt ist. Die Übergangsrelation $\to_M$ ist dann wie folgt definiert:

$$(q, aw, Z\gamma) \to_M (q', w, \gamma\gamma') \quad :\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \quad (q', \gamma') \in \delta(q, a, Z)$$

Die mit leerer Schleife akzeptierte Sprache eines Schleifomats ist definiert als

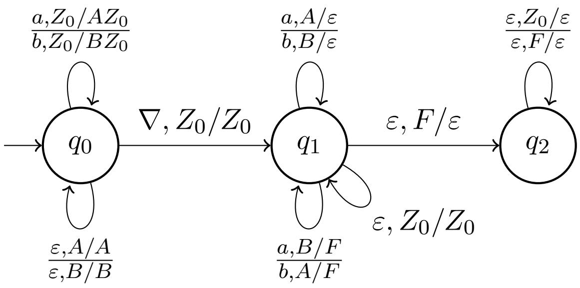
$$L_\varepsilon(M) := \left\{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q.\ (q_0, w, Z_0) \to_M^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \right\}.$$

Geben Sie einen Schleifomat für die nicht kontextfreie Sprache

$$\mathsf{L} := \{ u\nabla v \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| = |v|, u \neq v \}$$

an. Beschreiben Sie ihre Idee (informell).

Lösungsskizze
Idee: In q_0 wird für jeden Buchstaben links vom Trennzeichen ∇ ein korrespondierendes Zeichen aus dem Schleifenalphabet in die Schleife gelegt. Um die Ordnung beizubehalten, wird vor dem Einlesen eines Buchstabens immer die Schleife zurück zum Startsymbol durchgedreht.
Sobald das Trennezeichen eingelesen wurde, werden alle angehäuften Schleifensymbole in q_1 abgearbeitet. Dabei muss sich das rechte Wort an mindestens einer Stelle unterscheiden. Sobald dies geschieht, merken wir uns den Erfolg durch das Speichern eines Symbols F auf der Schleife. Sobald alle Schleifensymbole aus der ersten Phase abgearbeitet wurden, befindet sich entweder nur noch Z_0 in der Schleife und wir hängen in q_1 fest oder aber es befindet sich mindestens ein F auf der Schleife, mit welchem wir dann in q_2 wechseln können.
In q_2 werden schlussendlich alle übrigen Symbole von der Schleife entfernt und somit das Wort akzeptiert.



Der initiale Schleifeninhalt sei dabei Z_0.

[Hofstadter's Law]: It always takes longer than you expect, even when you take into account Hofstadter's Law.
— Douglas R. Hofstadter in Gödel, Escher, Bach – ein Endloses Geflochtenes Band