Prof. T. Nipkow
K. Kappelmann, J. Rädle, L. Stevens
KEINE ABGABE
Technische Universität München
Lehrstuhl für Logik und Verifikation

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt 8

AUFGABE 8.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- WHILE-Programme
- WHILE und GOTO-Programme
- Entscheidbarkeit
- charakteristische Funktion
- Gödelisierung
- spezielles Halteproblem
- allgemeines Halteproblem
- Halteproblem auf leerem Band
- Reduktion

AUFGABE 8.2. (*Entscheidbarkeit vs. Berechenbarkeit*) Stufe B

Ordnen Sie die folgenden Satzanfänge den Satzenden so zu, dass richtige Aussagen entstehen. Sei dazu $\mathsf{A}, \mathsf{B} \subseteq \{0,1\}^*$:

(a) Die Funktion χ_A ist berechenbar,
(b) A ist entscheidbar,
(c) B ist nicht entscheidbar,

(i) wenn $\mathsf{A} \leq \mathsf{B}$ gilt und B entscheidbar ist.
(ii) wenn A entscheidbar ist.
(iii) wenn $\mathsf{A} \leq \mathsf{B}$ gilt und A nicht entscheidbar ist.

AUFGABE 8.3. (*Entscheidbarkeit*) Stufe B

Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen korrekt oder inkorrekt sind. Begründen Sie dann Ihre Antworten wie folgt: Wenn L entscheidbar ist, beschreiben Sie einen Algorithmus, der die charakteristische Funktion χ_L berechnet. Wenn L unentscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch zu einem Ergebnis der Vorlesung ab.

(a) Wenn A und B entscheidbare Sprachen sind, dann ist $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ entscheidbar.
(b) Wenn A und $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ entscheidbar sind, dann ist B entscheidbar.

AUFGABE 8.4. (*Reduktionen*) Stufe B

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen korrekt oder inkorrekt sind, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen Beweis bzw. ein passendes Gegenbeispiel angeben. Sei $\Sigma = \{0,1\}$.

(a) $\forall A \subseteq \Sigma^*.\ A \leq \Sigma^*$
(b) $\forall A, B \subseteq \Sigma^*.\ A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$
(c) $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^*.\ A \leq B \wedge B \leq C \implies A \leq C$

AUFGABE 8.5. (*Reduktionen und Unentscheidbarkeit*) Stufe C

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Zeigen Sie: Es ist unentscheidbar zu prüfen, ob für zwei als Eingabe gegebene Turing-Maschinen die eine auf allen Eingaben genau dann hält, wenn die andere nicht hält. Formaler: Zeigen Sie, die Menge

$$\mathsf{H}_{\mathsf{NEQ}} \coloneqq \left\{ w_1 \# w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \text{ und } \forall x \in \Sigma^*.\ M_{w_1}[x]\!\downarrow \iff \neg M_{w_2}[x]\!\downarrow \right\}$$

ist unentscheidbar.

AUFGABE 8.6. (*Collatz-Vermutung*) Stufe C

Zu einem Startwert $a_0 \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wie folgt:

$$a_{n+1} \coloneqq \begin{cases} a_n/2 & a_n \text{ gerade} \\ 3a_n + 1 & a_n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die seit 1937 unbewiesene Collatz-Vermutung besagt:

Für alle positiven Startwerte $a_0 \in \mathbb{N}$ gibt es einen Index $i \in \mathbb{N}_0$, sodass $a_i = 1$.

Nehmen Sie an, es gibt ein Programm N, welches als Eingabe ein WHILE-Programm P mit genau einer Eingabevariable nimmt und zu jedem solchen P angibt, ob P die Nullfunktion berechnet. *Zeigen Sie, dass Sie dann die Collatz-Vermutung beweisen oder widerlegen können.*

Hinweise:

- Geben Sie auch das WHILE-Programm P, das Sie für Ihren Beweis verwendet haben, an.
- Sie dürfen jede Syntax, die in den Folien für WHILE-Programme eingeführt worden ist, verwenden.

```
x := x - 1;
WHILE x ≠ 0 DO
  x := x + 1;
  c := 2;
  z := x MOD c;
  IF z = 0 DO
    x := x DIV c
  ELSE
    z := x + x;
    x := x + z;
    x := x + 1
  END;
  x := x - 1
END;
y := 0
```