Prof. T. Nipkow
K. Kappelmann, J. Rädle, L. Stevens **ABGABE 29.06.2020, 23:59 (Σ 5 P.)** Technische Universität München
Lehrstuhl für Logik und Verifikation

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt Lösungsskizze 9

AUFGABE 9.1. (*Entscheidbarkeit*) 1,5 P

Geben Sie für jede der folgenden Mengen an, ob sie entscheidbar ist oder nicht. Beweisen Sie ihre Behauptung mithilfe des Satzes von Rice. Ist der Satz von Rice nicht anwendbar, reicht es zu begründen warum der Satz nicht anwendbar ist. In diesem Fall müssen Sie nicht beweisen ob die Menge entscheidbar ist.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists P.\, \forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) = \varphi_w(n)\}$ wobei P ein WHILE Programm ist.

(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}^*.\, \exists n \in \mathbb{N}.\, \varphi_w(n) = x\}$.

(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}.\, \varphi_w(n) = 1 \wedge w \neq w^R\}$.

Lösungsskizze

(a) Für jede Funktion φ_w gibt es ein äquivalentes WHILE Programm. Damit ist L_1 die Menge aller berechenbaren Funktionen und somit trivial entscheidbar.

(b) L_2 ist unentscheidbar. Beweis: Man setzt $F = \{f \mid f \text{ berechenbar } \wedge \forall x \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}^*. \exists n \in \mathbb{N}. f(n) = x\}$. Es gilt $F \neq \emptyset$ da man die Wörter in $\{\mathsf{a},\mathsf{b}\}^*$ enumerieren kann. (z.B. $(0,\mathsf{a}), (1,\mathsf{b}), (2,\mathsf{aa}), (3,\mathsf{ab}), (4,\mathsf{ba}), (5,\mathsf{bb}), (6,\mathsf{aaa}), \ldots$)
Außerdem gibt es offensichtlich Funktionen $\varphi_w \notin F$. Damit ist der Satz von Rice mit $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ anwendbar und es folgt die Behauptung.

(c) Die Menge ist unentscheidbar, jedoch ist der Satz von Rice nicht anwendbar. Für den Satz von Rice müsste es eine nicht-triviale Menge F an berechenbaren Funktionen geben, sodass $\mathsf{L}_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$. Das Problem ist, dass mehrere Kodierungen existieren können, deren Maschinen die gewünschte Funktion ($\exists n \in \mathbb{N}. \varphi_w(n) = 1$) berechnen, von denen jedoch manche Palindrome sind und manche nicht. Somit ist F nicht definierbar.

AUFGABE 9.2.

Gegeben seien zwei semi-entscheidbare Sprachen $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $A + B := \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$ auch semi-entscheidbar ist. Geben Sie dazu ein WHILE-Programm an, das die modifizierte charakteristische Funktion χ'_{A+B} berechnet. In ihrem Programm dürfen Sie bei Zuweisungen und in Bedingungen beliebige arithmetische Ausdrücke verwenden. Weiterhin sind auch alle aussagenlogischen Operatoren und Gleichheit in Bedingungen erlaubt. 1,5P

Lösungsskizze

Da A, B semi-entscheidbar sind, gibt es WHILE-Programme P_A, P_B, die χ'_A, χ'_B berechnen. Nach Korollar 5.24 können wir o.B.d.A annehmen, dass $P_A =$ `WHILE` C_A `DO` B_A `END` und $P_B =$ `WHILE` C_B `DO` B_B `END` gilt. Für die Konstruktion des unten folgenden Programms verwenden wir den "Dovetailing"-Ansatz, der in Tutoraufgabe 9.5 angesprochen wurde. Wir benennen die Variablen im Programm so um, dass es keine Überschneidungen zwischen P_A und P_B gibt. Weiterhin seien i_A, i_B die Eingabevariable von P_A bzw. P_B und i_{A+B} die Eingabe des Programms.

```
WHILE accept = 0 DO
    i_A := 0
    WHILE i_A ≤ i_{A+B} DO
        i_B := i_{A+B} - i_A
        WHILE C_A ∧ k_A ≤ k DO
            B_A
            k_A := k_A + 1
        END
        WHILE C_B ∧ k_B ≤ k DO
            B_B
            k_B := k_B + 1
        END
        IF ¬C_A ∧ i_A = 1 ∧ ¬C_B ∧ i_B = 1 DO
            // P_A und P_B akzeptieren ihre Eingaben nach k Iterationen
            accept := 1
        ELSE
```

```
            accept := 0
        END
        i_A := i_A + 1
    END
    k := k + 1
END
i_{A+B} = 1
```

AUFGABE 9.3. 1P

Zeigen oder widerlegen Sie: jede totale, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ hat ein entscheidbares Bild.

Lösungsskizze
Die Aussage ist falsch.

Beweis. Seien $g : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ und $g^{-1} : \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$ berechenbar und gegenseitig invers (z.B. $g(\varepsilon) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2, g(00) = 3, g(01) = 4, \dots$). Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine beliebige semi-entscheidbare aber unentscheidbare Menge (z.B. H_0). Da L semi-entscheidbar ist, ist L auch rekursiv aufzählbar. Somit existiert eine totale, berechenbare Funktion $h : \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$ mit $h(\mathbb{N}) = L$. Betrachte nun $g \circ h =: f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Da h und g total und berechenbar sind, ist auch f total und berechenbar. Wir zeigen nun, dass g eine Reduktion von L auf $f(\mathbb{N})$ ist, womit $f(\mathbb{N})$ unentscheidbar ist:
Wir wissen bereits, dass g total und berechenbar ist. Es gilt noch $w \in L \iff g(w) \in f(\mathbb{N})$ zu zeigen:
$\underline{\Longrightarrow}$: Sei $w \in L$. Dann folgt $g(w) \in g(L) = g(h(\mathbb{N})) = f(\mathbb{N})$.
$\underline{\Longleftarrow}$: Sei $g(w) \in f(\mathbb{N})$. Dann folgt $g^{-1}(g(w)) \in g^{-1}(f(\mathbb{N})) = g^{-1}(g(h(\mathbb{N}))) = g^{-1}(g(L)) = id(L) = L$, wobei wir benutzt haben, dass g^{-1} total und invers zu g ist. $\square$

AUFGABE 9.4. 1P

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ und $\triangleleft$ eine strikte partielle Ordnung (transitiv und asymmetrisch) auf Wörtern über Σ. Für eine gegebene, totale und berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ definieren wir $L := f(\mathbb{N}) = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zusätzlich nehmen wir an, dass es eine totale und berechenbare Funktion $s : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ gibt, so dass $s(w) = |\{u \mid u \triangleleft w\}|$. Zeigen Sie: Falls $m < n \Rightarrow f(m) \triangleleft f(n)$ gilt, dann ist L entscheidbar.

Lösungsskizze
Für eine Wort w definieren wir $L_w = \{f(i) \mid i \leq s(w)\}$. Dann ist L_w endlich und es gilt $L_w \subseteq L$. Zusätzlich zeigen wir, dass $w \in L_w$ wenn $w \in L$.
Sei also $w \in L$. Damit gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f(i) = w$ und für alle $j < i$ haben wir $f(j) \triangleleft f(i)$. Insgesamt ergibt sich dadurch $s(w) \geq i$, woraus $w \in L_w$ folgt.
Da $w \in L_w \Leftrightarrow w \in L$ und L_w entscheidbar (da endlich) ist, folgt die Entscheidbarkeit von L.