Prof. T. Nipkow
K. Kappelmann, J. Rädle, L. Stevens

KEINE ABGABE

Technische Universität München
Lehrstuhl für Logik und Verifikation

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt Lösungsskizze 9

AUFGABE 9.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- semi-entscheidbar
- rekursiv-aufzählbar
- Satz von Rice(-Shapiro)
- Triviale Teilmenge

AUFGABE 9.2. (*Reductio ad absurdum*) Stufe B

Sei $A \coloneqq \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in \mathbb{N}_0.\ |w| = 5i + 3\}$ mit $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Erklären Sie, warum die angegebenen Funktionen keine Reduktionen gemäß Vorlesungsdefinition sind.

(a) Behauptung: $\mathsf{H}_0 \leq A$
Reduktion: Definiere $f : H_0 \to A$ mit $f(w) \coloneqq \mathsf{aaa}$.

(b) Behauptung: $\mathsf{H}_0 \leq A$
Reduktion:

$$f(w) = \begin{cases} \mathsf{aaa} & \text{falls } w \in \mathsf{H}_0 \\ \mathsf{b} & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Behauptung: $A \leq \mathsf{H}_0$
Reduktion: f bildet jedes Element $x \in \Sigma^*$ auf die Kodierung einer TM M_x ab, die wie folgt definiert ist: Die TM M_x löscht die Eingabe und schreibt x aufs Band, bestimmt dann die Länge von x, zieht 3 ab und prüft anschließend, ob das Ergebnis durch 5 teilbar ist. Dementsprechend gibt die Maschine "Ja" (1) oder "Nein" (0) aus.

(d) Behauptung: $\overline{\mathsf{H}_0} \leq \mathsf{H}_0$
Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $\mathsf{M}_{f(w)}$ ab, die $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ simuliert. Falls $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ hält, geht $\mathsf{M}_{f(w)}$ in eine Endlosschleife. Falls $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ nicht hält, hält $\mathsf{M}_{f(w)}$.

(e) Behauptung: $H_{\Sigma^*} \leq \mathsf{H}_0$ mit $H_{\Sigma^*} \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ \mathsf{M}_w[x]\downarrow\}$.
Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $\mathsf{M}_{f(w)}$ ab, die erst die Eingabe löscht, dann nichtdeterministisch $x \in \Sigma^*$ erzeugt und dann $\mathsf{M}_w[x]$ simuliert.

Lösungsskizze

(a) f ist undefiniert auf $\{0,1\}^* \setminus H_0 \neq \emptyset$ und somit nicht total.

(b) f ist unberechenbar, da H_0 unentscheidbar ist und somit χ_{H_0} unberechenbar ist.

(c) f bildet auf Kodierungen von Turing-Maschinen ab, die immer terminieren. Da $\mathsf{a} \notin A$, aber $f(\mathsf{a}) \in \mathsf{H}_0$, erfüllt die Funktion f nicht die Definition einer Reduktion.
Außerdem ist die Notation M_x ungünstig, da wir einen Index einer TM in der Regel verwenden, um anzuzeigen, dass M_w die TM ist, die von w encodiert wird. In dieser Reduktion hat M_x aber eine andere Bedeutung.

(d) f ist nicht wohldefiniert. Wenn $\mathsf{M}_{f(w)}$ die Berechnung von $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ simuliert und $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ nicht hält, dann hält definitiv $\mathsf{M}_{f(w)}$ auch nicht.

(e) Sei w die Kodierung einer TM mit $\mathsf{M}_w[\varepsilon]\downarrow$ und $\mathsf{M}_w[0]\uparrow$. Dann gilt $w \notin H_{\Sigma^*}$ und $f(w) \in \mathsf{H}_0$.

AUFGABE 9.3. (*Vier Fäuste gegen Rice*) Stufe C

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen unentscheidbar sind und begründen Sie Ihre Antworten mit dem Satz von Rice (falls anwendbar). Geben Sie dabei die Menge $\mathcal{F}$ genau an und argumentieren Sie, warum die Menge nicht trivial ist (d.h. weder alle berechenbare Funktionen enthält noch leer ist).

(a) $\mathsf{L}_1 = \left\{w \in \{0,1\}^* \mid \{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\right\} \text{ ist regulär}\}$

(b) $\mathsf{L}_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall n \in \mathbb{N}_0.\ \varphi_w(n) = n * (n-23) + 42\}$

(c) $\mathsf{L}_3 \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ \varphi_w(x) \neq |w|\}$

(d) $\mathsf{L}_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall p \in \mathbb{N}_0.\ (|w| > p \land p \text{ ist prim}) \implies w_p = 0\}$, wobei $w_p \in \Sigma$ den Buchstaben an der p-ten Stelle im Wort w bezeichnet.

Lösungsskizze

(a) Sei $\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ ist berechenbar } \wedge f^{-1}(1) \text{ ist regulär}\}$. Sei nun g, h mit $g(w) := 1$ und

$$h(w) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists i \geq 0.\ w = 0^i 1^i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zwei berechenbare Funktionen. Dann gilt $g \in \mathcal{F}$ und $h \notin \mathcal{F}$. Somit ist $\mathcal{F}$ nicht die Menge aller berechenbarer Funktionen. Damit folgt aus dem Satz von Rice, dass L_1 unentscheidbar ist.

(b) Sei $\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ ist berechenbar } \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0.\ f(n) = n*(n-23)+42\}$. Dann gilt für die konstante Nullfunktion g, dass $g \notin \mathcal{F}$. Somit ist $\mathcal{F}$ nicht die Menge aller berechenbarer Funktionen. Weiterhin ist $\mathcal{F}$ auch nicht leer, da das Polynom in der Definition berechenbar ist. Somit ist nach Satz von Rice L_2 unentscheidbar.

(c) Die Menge ist unentscheidbar, jedoch ist der Satz von Rice nicht anwendbar. Für den Satz von Rice müsste es eine nicht-triviale Menge $\mathcal{F}$ an berechenbaren Funktionen geben, sodass $\mathsf{L}_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in \mathcal{F}\}$. Das Problem ist nun, das zwei Turingmaschinenkodierungen verschiedener Längen existieren können, sodass die Maschinen dieselbe Funktion berechnen, die eine Kodierung die Bedingung erfüllt, die andere jedoch nicht Formaler:
Je nach Kodierungsfunktion können $v, w \in \{0,1\}^*$ mit $|v| \neq |w|$ existieren, sodass $\varphi_v = \varphi_w$, $\varphi_w(x) = |w|$ für ein $x \in \Sigma^*$ und $\varphi_v(x) \neq |v|$ für alle $x \in \Sigma^*$. Somit ist weder $\varphi_w (= \varphi_v) \in \mathcal{F}$ noch $\varphi_v (= \varphi_w) \notin \mathcal{F}$ und somit ist $\mathcal{F}$ nicht definierbar.
Der Beweis für die Unentscheidbarkeit erfolgt analog zu Aufgabe 9.4 (a).

(d) L_3 ist entscheidbar. Eine TM kann alle Primzahlen kleiner $|w|$ berechnen und an diesen Stellen in w prüfen, ob $w_p = 0$ gilt.

AUFGABE 9.4. (*Sie nannten ihn Rice*) Stufe C

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Betrachten Sie die folgende Menge:

$$A := \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ \varphi_w(x) \neq |x|\},$$

Zeigen Sie:

(a) A ist nicht semi-entscheidbar durch geeignete Reduktion eines nicht semi-entscheidbaren Problemes.
(b) A ist nicht semi-entscheidbar mit dem Satz von Rice-Shapiro.

Lösungsskizze

(a) *Reduktion von $\overline{\mathsf{H}_0}$:*
   (i) Sei $w \in \{0,1\}^*$ beliebig. Wir berechnen die Kodierung w' einer Turing-Maschine, die bei jeder Eingabe x die Länge von x auf ein zweites Band schreibt, die Eingabe dann löscht, dann $M_w[\varepsilon]$ ausführt und sobald $M_w[\varepsilon]$ hält, das erste Band löscht und $|x|$ zurückschreibt. Die Reduktion gibt w' zurück.
   (ii) *Die Reduktion ist total:* Für jede Eingabe w wird die Ausgabe w' erzeugt.
   (iii) *Die Reduktion ist berechenbar:* Die En- und Dekodierungsfunktionen für Turing-Maschinen sind berechenbar. Eine TM kann alle Zeichen auf dem Band, die nicht dem Leerzeichen entsprechen, durch geeignete Übergänge überschreiben. Ebenso können wir die Länge von $|x|$ anfangs zählen, auf einem zweiten Band zwischenspeichern und am Ende zurückschreiben.
   (iv) *Die Reduktion ist korrekt:*

$$\begin{aligned} w \in \overline{\mathsf{H}_0} &\iff M_w[\varepsilon]\uparrow && (\text{Def. } \overline{\mathsf{H}_0}) \\ &\iff \forall x \in \Sigma^*.\ M_{w'}[x]\uparrow && (M_{w'} \text{ führt stets } M_w \text{ auf leerem Band aus}) \\ &\iff \forall x \in \Sigma^*.\ \varphi_{w'}(x) \neq |x| && (*) \\ &\iff w' \in A && (\text{Def. } A) \end{aligned}$$

Beweis von $(*)$:
$\Longrightarrow$: Wenn $M_{w'}$ nie terminiert, wird insbesondere nie $|x|$ zurückgegeben.
$\Longleftarrow$: Kontraposition: Wenn $M_{w'}$ für ein x terminiert, dann ist die Rückgabe $|x|$ nach Konstruktion.

(b) Sei $\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ ist berechenbar } \wedge \forall x \in \Sigma^*.\ f(x) \neq |x|\}$. Die überall undefinierte Funktion g ist Element von $\mathcal{F}$. Die Wortlängenfunktion $|\cdot| \supset g$ hingegen ist kein Element von $\mathcal{F}$. Nach Satz von Rice-Shapiro ist somit A nicht semi-entscheidbar.

AUFGABE 9.5. (*Kurzer Prozess*) Stufe B/C

Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Beweisskizze oder geben Sie ein passendes Gegenbeispiel an.

(a) Sei $\Sigma = \{0,1\}$. Für alle $A \subseteq \Sigma^*$ mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Sigma^*$ gilt $A \leq \overline{A}$.
(b) Das Problem, ob $\mathsf{L}(\mathsf{M}) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.
(c) Das Problem, ob $\mathsf{L}(\mathsf{M}) = \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.

Lösungsskizze

(a) Falsch. Sei $A := \overline{\mathsf{H}_0}$. Nach Vorlesung wissen wir, $\overline{\mathsf{H}_0}$ ist nicht semi-entscheidbar und H_0 ist semi-entscheidbar. Insbesondere sind die Mengen nicht trivial. Angenommen (a) gilt, dann haben wir $\overline{\mathsf{H}_0} \leq \overline{\overline{\mathsf{H}_0}} = \mathsf{H}_0$. Damit ist H_0 nicht semi-entscheidbar. Widerspruch!

(b) Wahr. Eine NTM M', kann nichtdeterministisch ein Wort w auf das Band schreiben und dann die TM M ausführen. Wenn $w \in \mathsf{L}(M)$, dann hält M und somit auch M'. Diese NTM kann von einer DTM simuliert werden und terminiert gdw. $\mathsf{L}(M)$ nicht leer ist. Andernfalls terminiert die Simulation nie.

Direkte DTM Konstruktion: Verwende einen wachsenden Zähler $i = 0, 1, \ldots$ und simuliere $\mathsf{M}[w]$ für i Schritte und für alle $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq i$. Falls irgendeine $\mathsf{M}[w]$ hält, stoppe Simulation und gib "1" aus. Dieses Prinzip wird auch "Dovetailing" genannt.

(c) Falsch. Wir reduzieren H_0 auf das Problem der Aufgabe (b). Damit ist das Problem (b) unentscheidbar und somit das Komplement, nämlich Problem (c), nicht semi-entscheidbar:

Bilde gegebenes w auf die Codierung w' folgender TM ab: Bei Eingabe $x \neq \varepsilon$, lehne x ab. Ansonsten simuliere $M_w(\varepsilon)$ bis sie terminiert und akzeptiere. Somit akzeptiert $M_{w'}$ höchstens ε und das genau dann, wenn M_w auf ε terminiert.

Alternativ mit Rice-Shapiro:
Annahme zum Widerspruch: $\mathsf{L}(M) = \emptyset$ ist semi-entscheidbar. Sei $\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ ist berechenbar } \wedge \forall x \in \Sigma^*.\ f(x) = \bot\} = \{\emptyset\}$. Nach Annahme ist $C_{\mathcal{F}} = \{w \mid \varphi_w \in \mathcal{F}\} = \{w \mid \mathsf{L}(M_w) = \emptyset\}$ semi-entscheidbar. Für jede an zumindest einer Stelle definierte Funktion gilt $f \notin \mathcal{F}$. Mit dem Satz von Rice-Shapiro folgern wir, dass es keine endliche Funktion $g \subseteq f$ mit $g \in \mathcal{F}$ gibt. Jedoch ist die überall undefinierte Funktion $g = \emptyset \subseteq f$ in $\mathcal{F}$. Widerspruch!