Prof. T. Nipkow
K. Kappelmann, J. Rädle, L. Stevens **ABGABE 13.07.2020, 23:59 (Σ 6 P.)** Technische Universität München
Lehrstuhl für Logik und Verifikation

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt 11

AUFGABE 11.1. (*Unbezahltes Praktikum*) 0,5 + 1,5 + 0,5 P

Die TUM plant eine innovative neues Lehrveranstaltung; eine Mischung aus Seminar und Praktikum. In den ersten v Wochen der Veranstaltung gibt es jeweils einen Vortrag eines Studierenden, der zweite Teil besteht dann aus p Praktika. Dabei gibt es jedoch potenzielle Terminkonflikte: Von den insgesamt n Studierenden ist in jeder Woche $k \in \{1, \dots, v\}$ nur eine Teilmenge S_k verfügbar um einen Vortrag zu halten. Außerdem hat jedes Projekt als Voraussetzung, dass ein gewisser Vortrag gehalten wurde. Für jedes Projekt $i \in \{1, \dots, p\}$, gibt es eine Menge P_i an Studierenden, von denen mindestens eine/r einen Vortrag gehalten haben muss, damit das Projekt bearbeitet werden kann.

PRAKTIKUM:

Gegeben: Endliche Menge S (Studierende), Anzahl Vorträge v, Anzahl Praktika p. Teilmengen $S_k \subseteq S$ (Verfügbarkeit in Woche k), $P_i \subseteq S$ (Voraussetzungen für Praktika)

Problem: Gibt es eine Zuordnung von Studierenden zu Veranstaltungswochen, so dass jede Woche genau ein/e Student/in (der/die in dieser Woche verfügbar ist) vorträgt und dass jedes Projekt bearbeitet werden kann.

(a) Zeigen Sie, dass PRAKTIKUM in NP liegt.
(b) Zeigen Sie, dass PRAKTIKUM NP-schwer ist, indem sie eine geeignete polynomielle Reduktion von 3-KNF-SAT angeben. Zeigen Sie dabei auch die Korrektheit Ihrer Reduktion.
(c) Wenden Sie Ihre Reduktionsfunktion auf die folgende Instanz von 3-KNF-SAT an:

$$(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Vergewissern Sie sich dass Ihr Ergebnis Sinn macht, also dass eine erfüllende Belegung für die SAT Instanz eine Lösung für die PRAKTIKUM Instanz ergibt und umgekehrt.

AUFGABE 11.2. (*In Form L*) 0,5 + 0,5 + 1P

Geben Sie für jede der folgenden Aussage eine informelle aber umfassende Begründung an. Ein Korrektheitsbeweis ist jeweils nicht notwendig.

(a) Sei G eine CFG in Chomsky-Normalform. Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathsf{L}(G) \leq_p SAT$.
(b) Zeigen Sie, dass $H = \{w\#x \mid M_w[x] \downarrow\}$ NP-schwer aber nicht NP-vollständig ist. Geben Sie für die NP-Schwere eine geeignete Reduktion $A \leq_p H$ für ein NP-schweres Problem A an.
(c) Wir betrachten das RUCKSACK-Problem (siehe Folie 409) mit der Modifikation, dass b unär kodiert ist. Weiterhin gelte für alle i, dass $a_i \leq b$ Zeigen Sie, dass das RUCKSACK-Problem in P liegt, indem Sie einen Algorithmus angeben, der RUCKSACK entscheidet. Begründen Sie kurz, dass ihr Algorithmus polynomielle Laufzeit in der Länge der Eingabe hat.

AUFGABE 11.3. (*Total abge*SPACE*d*) 0.5 + 1P

Zeit ist nicht die einzig wertvolle Ressource der Komplexitätstheorie. Die Turingmaschinen der Praxis (aka Computer) besitzen leider nur endlich viel Speicher, weswegen auch der Speicherbedarf eines Programmes von Interesse ist. Wir werden uns daher in dieser und einer kommenden Aufgabe zumindest auch ein wenig mit Speichergrenzen beschäftigen. Analog zu time_M und TIME aus der Vorlesung definieren wir hierzu:

- $\mathsf{space}_M(w)$: die Anzahl an verschiedenen, besuchten Zellen der DTM M bei Eingabe w.
- $\mathsf{SPACE}(f(n)) := \{A \subseteq \Sigma^* \mid \exists \mathsf{DTM}\, M.\ L(M) = A \wedge \forall w \in \Sigma^*.\ \mathsf{space}_M(w) \leq f(|w|)\}$.

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass mehr Zeit/Speicher auch wirklich mehr Power bedeutet. Wir legen hierfür einen ersten Grundstein in dieser Hausaufgabe und führen den Beweis im nächsten Hausaufgabenblatt fort. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ hierfür berechenbar und total.

(a) Zeigen Sie: $\mathsf{TIME}(f(n)) \subseteq \mathsf{SPACE}(f(n))$.
(b) Zeigen Sie: Es existiert eine *entscheidbare* Sprache $L \notin \mathsf{TIME}(f(n))$. Verwenden Sie hierfür einen Diagonalisierungsansatz ähnlich zu Satz 5.63.

> "yields falsehood when preceded by its quotation" yields falsehood when preceded by its quotation.
> — Williard Van Orman Quine
>
> Welcome to the wonderful world of paradoxes, uncertainty, and incompleteness.