Prof. T. Nipkow
K. Kappelmann, J. Rädle, L. Stevens

KEINE ABGABE

Technische Universität München
Lehrstuhl für Logik und Verifikation

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt 11

AUFGABE 11.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Polynomielle Reduktion $\leq_p$
- NP-schwer
- NP-vollständig
- SAT
- 3-KNF-SAT

AUFGABE 11.2. ($\mathsf{P} = \mathsf{NP} \overset{\mathsf{P}\neq 0}{\iff} \frac{\mathsf{P}}{\mathsf{P}} = \frac{\mathsf{NP}}{\mathsf{P}} \iff \frac{1}{1} = \frac{\mathsf{N}}{1} \iff 1 = \mathsf{N} \quad \square$) Stufe B

Diskutieren Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jede Sprache, die von einer NTM in polynomieller Zeit akzeptiert werden kann, existiert eine DTM, die ebenfalls die Sprache in polynomieller Zeit akzeptiert.

(b) Wenn A NP-schwer ist, dann gilt $A \in \mathbf{P}$.

Die textuelle Lösung finden Sie vorab auf Moodle/der Vorlesungswebsite.

AUFGABE 11.3. (*Ich hätt dann mal gern den Publikumsjoker*) Stufe B

Nehmen Sie an, dass $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

(a) Wenn $\mathsf{A} \leq_p$ 2-KNF-SAT, dann ist A $\mathbf{NP}$-vollständig.

(b) Sei $\mathsf{B} \in \mathbf{P}$ und $\mathsf{A} \leq \mathsf{B}$. Dann ist $\mathsf{A} \in \mathbf{P}$.

(c) Sei $\overline{\mathsf{A}} \in \mathbf{P}$. Dann ist $\mathsf{A} \in \mathbf{NP}$. (Hinweis: $\overline{\mathsf{A}}$ ist das Komplement von A.)

(d) Es gilt: ($\mathsf{A} \leq_p$ SAT und MÜ $\leq_p \mathsf{A}$) gdw. A $\mathbf{NP}$-vollständig.

(e) Gegeben sei ein gewichteter Graph G. Folgendes Problem ist $\mathbf{NP}$-schwer:
`INPUT:` Eine natürliche Zahl k. `OUTPUT:` 1, falls in G eine Rundreise der Länge $\leq k$ existiert, die alle Knoten genau einmal besucht, sonst 0.

AUFGABE 11.4. (*Stundenplan*) Stufe C

In dieser Aufgabe betrachen wir das STUNDENPLAN-Problem:

Gegeben: Endliche Mengen S (Studierende), V (Vorlesungen) und T (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass s die Vorlesung v besuchen möchte.

Problem: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

$$(s, v_1) \in R \land (s, v_2) \in R \land v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-hart ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben.

AUFGABE 11.5. (*Wizard of ZOLP*) Stufe D

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem *Zero-One-Linear-Program (ZOLP)* NP-schwer ist. Geben Sie hierzu eine geeignete Reduktion von 3-KNF-SAT auf ZOLP an und beschreiben Sie **zusätzlich** das Vorgehen anhand folgender Formel:

$$(\neg x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (x_1 \lor \neg x_3 \lor x_4)$$

Definition (ZOLP-Entscheidungsproblem)

Eingabe: Ein System von linearen Ungleichungen

$$\begin{aligned}
b_1 &\leq a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n \\
b_2 &\leq a_{2,1}y_1 + \ldots + a_{2,n}y_n \\
&\vdots \\
b_m &\leq a_{m,1}y_1 + \ldots + a_{m,n}y_n
\end{aligned}$$

mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{Z}$ und $m, n > 0$.

Frage: Gibt es für die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ Werte aus $\{0, 1\}$, sodass alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind?