Prof. T. Nipkow
K. Kappelmann, J. Rädle, L. Stevens

KEINE ABGABE

Technische Universität München
Lehrstuhl für Logik und Verifikation

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt 12

AUFGABE 12.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Approximationsalgorithmus
- LOOP-berechenbar
- Primitiv-rekursiv
  - Projektionsfunktion
  - erweiterte Komposition
  - Cantorsche Paarungsfunktion

AUFGABE 12.2. (*SAT-Varianten*) Stufe C

Wir betrachten verschiedene Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind. Zeigen Sie diese NP-Vollständigkeit, indem Sie für jede Variante X eine Reduktion 3-KNF-SAT $\leq_p X$ angeben und $X \in$ NP zeigen.

(a) Wir betrachten den ITE-Operator mit der Semantik $\texttt{ITE}(x, y, z) := (x \to y) \wedge (\neg x \to z)$. Eine ITE-Formel genügt der folgenden Grammatik:

$$F \to \texttt{ITE}(F, F, F) \mid x \mid \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \qquad \text{für Variablen } x \in \mathcal{V}$$

ITE-SAT:
- Eingabe: Eine ITE-Formel F.
- Frage: Ist F erfüllbar?

(b) 3-OCC-KNF-SAT:
- Eingabe: Eine Formel F in KNF, bei der jede Variable höchstens dreimal auftritt.
- Frage: Ist F erfüllbar?

AUFGABE 12.3. (*Nullstellen Problem*) Stufe C

Wir betrachten das NULLSTELLEN-Problem:

Gegeben Ein Polynom p über Variablen $x_1, \dots, x_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten.

Problem Gibt es eine ganzzahlige Nullstelle, also $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}$ mit $p(v_1, \dots, v_n) = 0$?

(a) Zeigen Sie, dass das NULLSTELLEN-Problem NP-hart ist, indem Sie eine Reduktion von SAT angeben. Hinweis: Die folgenden Beziehungen könnten dabei nützlich sein:

$$f(x)g(x) = 0 \iff f(x) = 0 \vee g(x) = 0$$
$$f(x)^2 + g(x)^2 = 0 \iff f(x) = 0 \wedge g(x) = 0$$

(b) Wo liegt das Problem bei folgendem “Beweis”, dass NULLSTELLEN in NP ist:

> Ein Zertifikat ist genau eine Nullstelle von p, also ein Vektor von Zahlen $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}$. Ein Verifikator muss nun lediglich überprüfen, ob $p(v_1, \dots, v_n) = 0$. Nach Satz 5.10 ist das Problem damit in NP.

AUFGABE 12.4. (*All You Need is Recursion*)

In den nachfolgenden Aufgaben dürfen Sie die erweiterte Komposition von primitiv rekursiven Funktionen verwenden.

(a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$\mathit{ifthen}(n, a, b) = \begin{cases} a, & n \neq 0 \\ b, & n = 0 \end{cases}$$

ist primitiv-rekursiv.

(b) Zeigen Sie: Die Funktion

$$\mathit{tower}(n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$$

die einen 2-er Turm der Höhe n berechnet, ist primitiv-rekursiv. Dabei soll $\mathit{tower}(0) = 1$ gelten.

(c) Für den Binomialkoeffizient gilt $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{0}{m} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_+$. Außerdem gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ die Rekursionsgleichung:

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m}.$$

Für fixiertes $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun die Funktion $b_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \binom{n}{m}$. Zeigen Sie: Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist die Funktion b_m primitiv rekursiv.